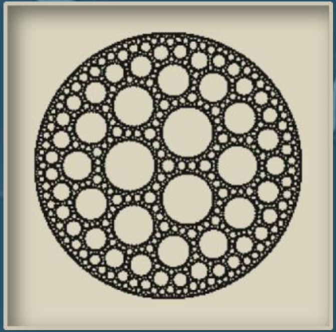
НЕСОБСТВЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ



[определение несобственного интеграла - несобственный интеграл по неограниченному промежутку (первого рода) - первый признак сходимости несобственного интеграла первого рода - второй признак сходимости несобственного интеграла первого рода - несобственный интеграл от неограниченной функции - сходимость несобственного интеграла с параметром, гамма-функция – примеры]

Определение несобственного интеграла

Интеграл называется *несобственным*, если

- один или оба его пределы *бесконечны*
- или подынтегральная функция *имеет точки разрыва второго рода*
- или имеет место и то, и другое

- $\int_0^{\infty} e^{-x}dx$
- $\int_0^{1} \frac{1}{x}dx$
- $\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{x}dx$

Несобственный интеграл первого рода

Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[a,\infty)$ и интегрируема на любом отрезке $[a,A] \subset [a,\infty)$

- *Несобственным интегралом* от функции $f(x)$ по бесконечному промежутку $[a,\infty)$ - несобственным интегралом 1-го рода, называют предел

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{A\to\infty}\int_a^{A} f(x)dx$$

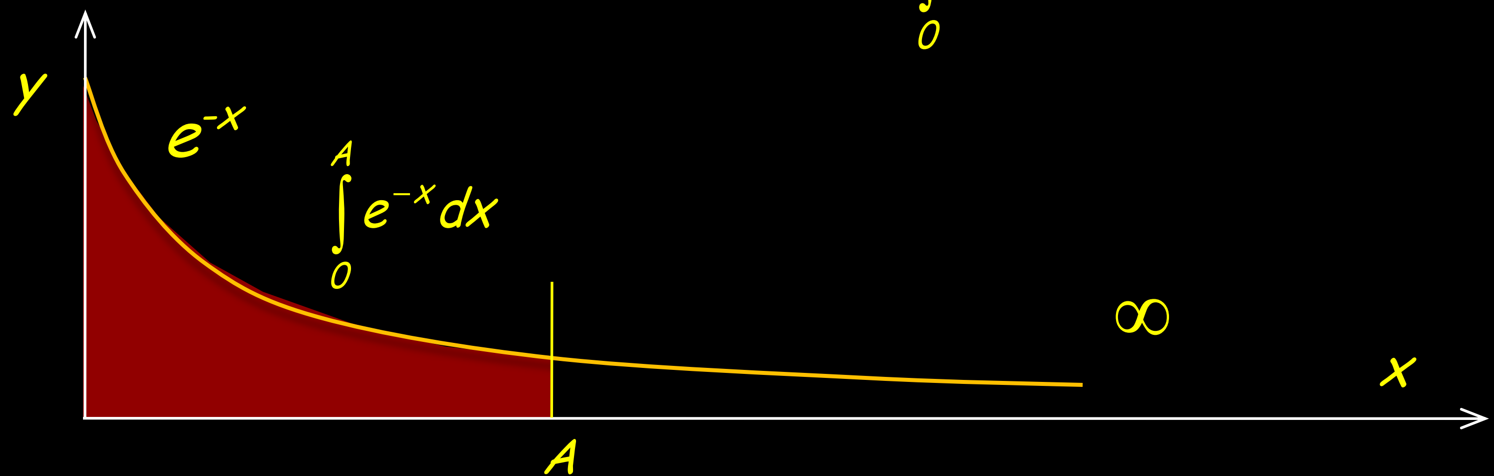
Если предел конечен, то несобственный интеграл называется *сходящимся*, в противном случае – *расходящимся*.

Если $f(x) > 0$, то несобственный интеграл представляет площадь неограниченной криволинейной трапеции.

Обобщение формулы Ньютона -Лейбница: $\int_a^{\infty} f(x)dx = F(\infty) - F(a)$

Пример

@ Вычислить несобственный интеграл $\int_0^{\infty} e^{-x}dx$

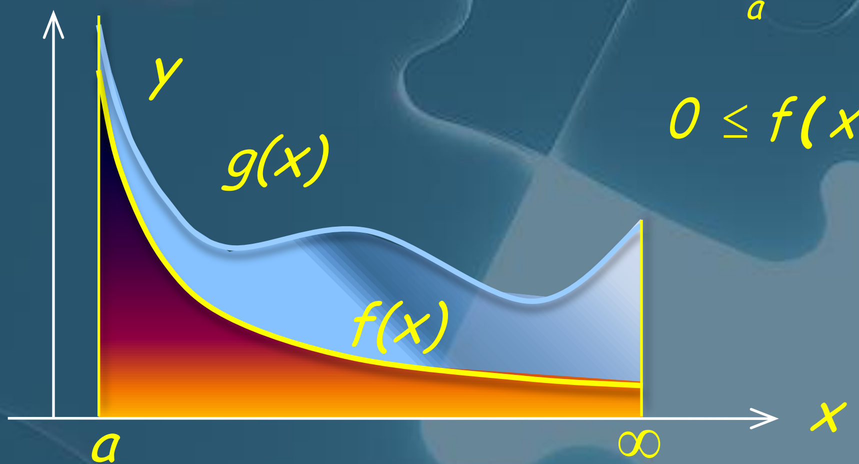


$$\int_0^{\infty} e^{-x}dx = \lim_{A\to\infty}\int_0^{A} e^{-x}dx = \lim_{A\to\infty}\left(-e^{-x}\right)\Big|_0^A = \lim_{A\to\infty}\left(-\frac{1}{e^A}+\frac{1}{e^0}\right) = 1$$

Первый признак сходимости несобственного интеграла первого рода

- Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на промежутке $[a,\infty)$ и при этом $0 \le f(x) \le g(x)$ то тогда

1. если сходится интеграл $\int_a^\infty g(x)dx$, то сходится и интеграл $\int_a^\infty f(x)dx$
2. если расходится интеграл $\int_a^\infty f(x)dx$, то расходится и интеграл $\int_a^\infty g(x)dx$



$$0 \le f(x) \le g(x) \Leftrightarrow 0 \le \int_a^\infty f(x)dx \le \int_a^\infty g(x)dx$$

Второй признак сходимости несобственного интеграла первого рода

- Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на промежутке $[a, \infty)$ и не отрицательны и существует конечный отличный от нуля предел их отношения $f(x)/g(x)$, то несобственные интегралы в смысле сходимости ведут себя одинаково, то есть оба сходятся или оба расходятся.

Несобственный интеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$ называется абсолютно сходящимся,

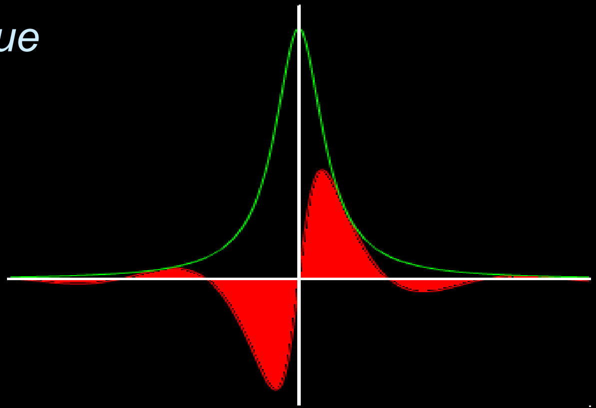
если сходится интеграл $\int_a^{\infty} |f(x)|dx$.

Если последний интеграл расходится, а исходный интеграл сходится, то его называют условно сходящимся.

Пример

@ *Исследовать сходимость несобственного интеграла* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{1+x^2}dx$

Решение



$$\left|\frac{\sin x}{1+x^2}\right| \le \frac{1}{1+x^2}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \operatorname{arctg} x \Big|_{-\infty}^{\infty} = \operatorname{arctg}(\infty) - \operatorname{arctg}(-\infty) = \pi$$

Ответ: интеграл сходится абсолютно (по первому признаку сходимости)

Несобственный интеграл от неограниченной функции

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a,b)$, а в точке b является неограниченной, т.е. имеет в этой точке бесконечный разрыв $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = \infty$

- *Несобственным интегралом второго рода* от функции $f(x)$ называют предел

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{B\to b-0}\int_a^B f(x)$$

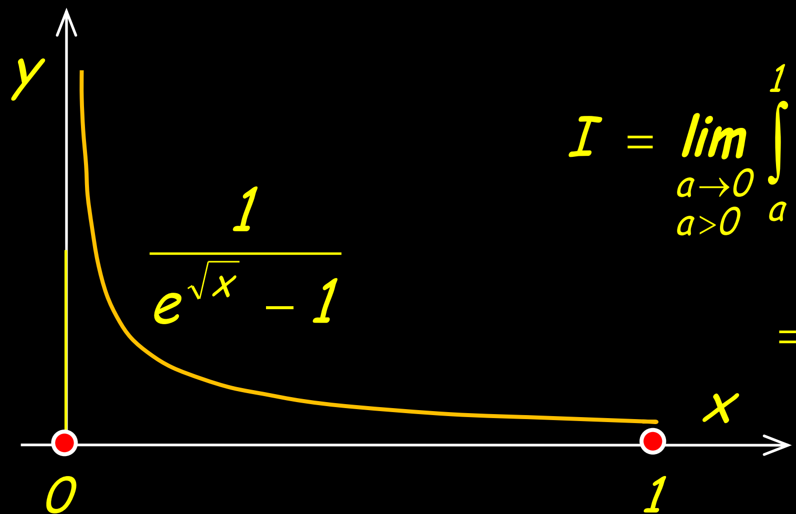
Если предел конечен, то несобственный интеграл называется *сходящимся*, в противном случае – *расходящимся*.

Если $f(x) > 0$, то несобственный интеграл представляет площадь неограниченной криволинейной трапеции.

Если у $f(x)$ бесконечный разрыв в точке c отрезка $[a,b]$ $\int_a^b f(x)dx \overset{def}{=} \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,\ \lim\limits_{x\to c} f(x) = \infty$

Пример

@ Исследовать сходимость $I = \int\limits_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}} - 1}$



$$I = \lim_{\substack{a\to 0\\ a>0}} \int\limits_a^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}} - 1} \Rightarrow \left\langle x = t^2, dx = 2tdt \right\rangle \Rightarrow$$

$$= \lim_{b\to 0} \int\limits_b^1 \frac{2tdt}{e^t - 1} = ? \qquad \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Big|_0^1 = 2$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}}{e^{\sqrt{x}} - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{e^{\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}}} = 1$$

Ответ : интеграл сходится (по второму признаку сходимости)

Гамма-функция Эйлера

- Гамма-функция – эйлеров интеграл второго рода $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$

$\Gamma(x)$ функция определена в области $x>0$

Интеграл $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ смешанный несобственный интеграл с особыми точками $t=0,\ t=+\infty$

Для любого x справедлива формула $\Gamma(x+1)=x\,\Gamma(x)$ называемая формулой приведения

$$\Gamma(x+1)=\int_0^{+\infty} t^{x}e^{-t}dt=-t^{x}e^{-t}\Big|_0^{+\infty}+x\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt=x\,\Gamma(x)$$

Для любого $x\subset N,\ 0<p\leq 1$ справедлива формула

$$\Gamma(n+p)=(n-1+p)(n-2+p)\cdots p\,\Gamma(p)$$

Пример

- Гамма-функция определяется для $x > 0$ как несобственный интеграл с параметром

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,dt$$

Интеграл, определяющий гамма - функцию, является несобственным первого рода. При $0 < x < 1$ интеграл несобственный второго рода, так как подинтегральная функция имеет сингулярность при $x = 0$.

- $0 < t < 1$ Интеграл сходится если $p > -1$

$$\int_0^1 t^p dt = \lim_{a\to 0+} \int_a^1 t^p dt = \lim_{a\to 0+} \left.\frac{t^{p+1}}{p+1}\right|_a^1 = \lim_{a\to 0+}\left(\frac{1}{p+1} - \frac{a^{p+1}}{a+1}\right) = \frac{1}{p+1}$$

Пример

- Гамма-функция определяется для $x > 0$ как сходящийся несобственный интеграл

Заметим, что при $t > 0$ $\quad t^{x-1}e^{-t} < t^{x-1}$

Интеграл сходится по признаку сравнения.

- $t > 1 \quad \int_{1}^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$

$\lim\limits_{t\to\infty} t^{x-1}e^{-\frac{t}{2}} = 0$ при любом x $\quad t > b_x \quad t^{x-1}e^{-\frac{t}{2}} < 1$

Интеграл сходится по признаку сравнения. $\int_{b_x}^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt \Leftrightarrow \int_{b_x}^{+\infty} e^{-t}dt$

Гамма-функция Эйлера

- $\Gamma(1) = 1$ $\qquad \Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = -e^{-t}\Big|_0^{+\infty} = (-\frac{1}{e^{\infty}} + \frac{1}{e^0}) = 1$
- $\Gamma(n+1) = n!$

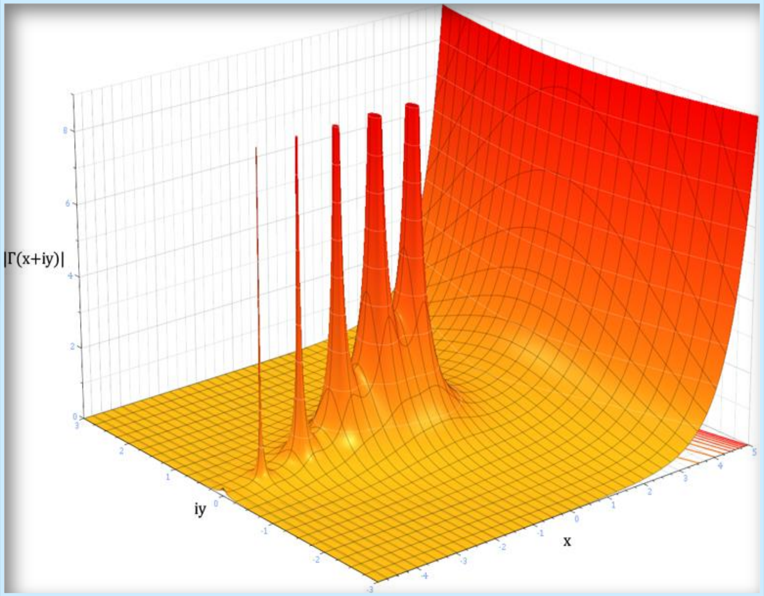
$$\Gamma(n+1) = (n-1+1)(n-2+1)\cdots\Gamma(1) = n\cdot(n-1)\cdots 1 = n!$$

- $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

Интеграл Эйлера - Пуассона

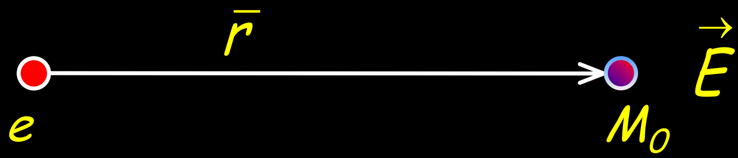
$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t}dt = \int_0^{+\infty} u^{-1}e^{-u^2}\,2udu =$$

$$= 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du = 2\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$$



Пример

@ *Исследовать электростатический потенциал одиночного электрического заряда*



$$\vec{E} = \frac{e}{r^2}\vec{r}^{\,o} = \frac{e\vec{r}}{r^3}$$

$$\Phi = \int_{r^o}^{r} f(r)\vec{r} \bullet d\vec{r}$$

$$\Phi = \int_{r^o}^{r} \vec{E} \bullet d\vec{r} = e\int_{(M_0M)} \frac{\vec{r} \bullet d\vec{r}}{r^3} = e\int_{M_0}^{M} \frac{dr}{r^2} = e\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{M_0}^{M} =$$

$$= e\left(-\frac{1}{r} + \frac{1}{r_0}\right) = -\frac{e}{r} + const \qquad \vec{E} = grad\left(-\frac{e}{r}\right)$$

Поле точечного заряда является полем градиента потенциала Φ