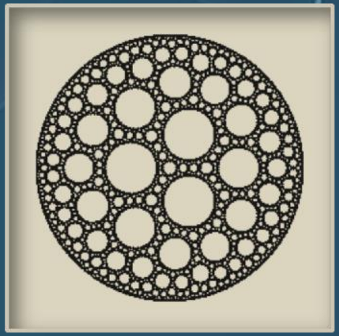
ПРЕДЕЛЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ И ФУНКЦИИ



{ предел последовательности - число e - оценка – предел функции - теоремы о пределах - признаки существования пределов - замечательные пределы – первый и второй – бесконечно малые величины и их свойства - сравнение бесконечно малых величин - теоремы о бесконечно малых величинах – примеры }

Предел последовательности

- Пусть A – произвольное множество и пусть каждому $n \in N$ поставлен в соответствие некоторый элемент $a \in A$. Тогда говорят, что задана *последовательность* $a_1, a_2, a_3, \ldots,$ которая обозначается также символами $\{a_n\}$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n\}_{n \in N}$

Пример $\left\{\dfrac{1}{n!}\right\}_{n=0,1,2,3\ldots\ldots}$ $1,\ 1,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{6},\ \dfrac{1}{24},\ \ldots,\ \dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n},\ \ldots$

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots n,\ n \geq 1,\ \ 0! = 1$$

- Число $a \in R$ называется *пределом последовательности* $\{a_n\}$, если для $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in N : |a - a_n| < \varepsilon\ \forall n \geq n_\varepsilon$

Предел последовательности

- Последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной* (ограниченной сверху, ограниченной снизу), если $\exists b \in R : |a_n| \le b \quad (a_n \le b, a_n \ge b) \quad \forall n \in N$

Теорема

Сходящаяся последовательность ограничена. Обратное неверно.

Доказательство

Пусть последовательность $\{a_n\}$ сходится и $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Тогда для $\varepsilon = 1 \quad \exists n_1 \in N : |a - a_n| < 1 \quad \forall n \ge n_1$

так что $a - 1 < a_n < a + 1 \quad \forall n \in n_1$

Пусть $b_1 := max(a_1, a_2, \ldots, a_{n_1 - 1})$ Очевидно, что $\{a_n\} \le b_1$ $\square$

Свойства пределов (связанные с арифметическими операциями)

Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in R$ $\quad \exists \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \in R$

то $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}\ \left(b_n \neq 0\ (\forall n \in N), b \neq 0\right)$$

- Последовательность $\{a_n\}$ называется *бесконечно малой*, если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$
- Сумма, разность и произведение двух бесконечно малых последовательностей являются бесконечно малыми последовательностями
- Последовательность $\{a_n\}$ называется *бесконечно большой*, если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \qquad n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n,\ n \geq 1, \quad 0! = 1$$

e иногда называют *неперовым числом* или *числом Эйлера*

Ряд сходится

$$s_n = 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} <$$

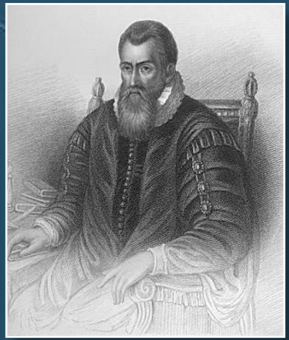
$$< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} = 2 + \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{2}} =$$

$$= 2 + \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) < 3$$

$$2 < e < 3$$

□

Leonhard Euler
(1707 – 1783)



John Napier
(1550 – 1617)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Теорема

Доказательство

$$s_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \qquad t_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$t_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\frac{1}{n^k} = 1+\sum_{k=1}^{n}\prod_{j=1}^{k}\frac{n-j+1}{nj}$$

$$\frac{n-j+1}{nj} \le \frac{n+1-j+1}{(n+1)j} \Rightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$\frac{n-j+1}{nj} \le \frac{1}{j} \Rightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = e$$

□

Оценка числа e

- $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \ldots \approx 2.718281828459..$$

$$0 < e - s_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \ldots < \frac{1}{(n+1)!}\left\{1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots\right\} = \frac{1}{n!\,n}$$

$$\varepsilon = e - s_{10} < \frac{1}{11!\,11} \approx 10^{-7}$$

Тождество Эйлера $e^{i\pi} + 1 = 0$

- Число e - иррациональное

Допустим e – число рациональное,

тогда $e = \frac{p}{q},\ p, q \in N$

$$0 < q!\,(e - s_q) < 1/q$$

Согласно предположению $q!e$ – целое число. Тогда число $q!(e-s_q)$ тоже целое.

$$q!\,s_q < q!\,\left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{q!}\right)$$

Так как $q >= 1$, то выходит существует целое число между нулем и единицей !

Мы добились противоречия. $\square$

Предел функции

- Определение (по Коши)

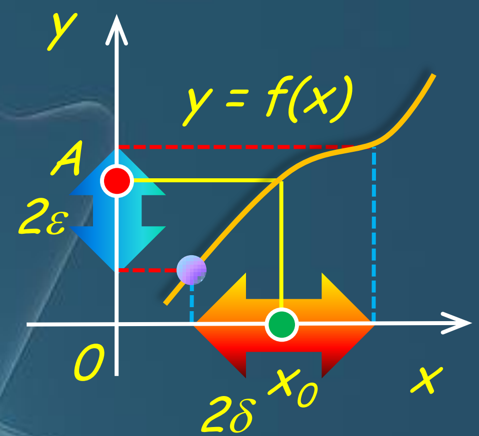
Постоянное число A называется пределом функции $f(x)$ в точке x_0 (при x стремящемся к x_0) если для произвольного числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из условия $|x - x_0| < \delta$ (x не равно x_0) вытекает неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

- Определение (в кванторах)

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \left(\forall x : |x - x_0| < \delta \wedge \forall x \neq x_0 \right) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

- Бесконечно малая величина $\lim u = 0$

Переменная величина u называется бесконечно малой, если, каково бы не было малое положительное числа $\varepsilon > 0$, в процессе изменения переменной наступит момент, начиная с которого будет постоянно выполняться неравенство $|u| < \varepsilon$.



@ Доказать, что предел $\lim_{x \to 0} a^x = 1 \quad (a > 1)$

Доказательство

Требуется доказать $|a^x - 1| < \varepsilon$ при $|x| < \delta(\varepsilon)$

$$-\varepsilon < a^x - 1 < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad 1 - \varepsilon < a^x < 1 + \varepsilon$$

логарифмируем последние неравенства по основанию a ($a > 1$)

$$\log_a(1 - \varepsilon) < x < \log_a(1 + \varepsilon) \qquad -\log_a \frac{1}{1 - \varepsilon} < x < \log_a(1 + \varepsilon)$$

$$\delta(\varepsilon) = \min\left[\log_a(1 + \varepsilon), \log_a \frac{1}{1 - \varepsilon}\right] \qquad -\delta(\varepsilon) < x < \delta(\varepsilon)$$

$$|x| < \log_a(1 + \varepsilon)$$

Бесконечно малые и бесконечно большие величины

- Теорема 1. Алгебраическая сумма любого определенного числа бесконечно малых является величиной бесконечно малой.
- Теорема 2. Произведение бесконечно малой величины на ограниченную величину является величиной бесконечно малой.

Доказательство

Пусть α – бмв, а u – ограниченная переменная величина.

$$|\alpha| < \frac{\varepsilon}{M} \quad |u| < M \quad \Rightarrow \quad |u \cdot \alpha| < |M| \left|\frac{\varepsilon}{M}\right| = \varepsilon$$ что и доказывает теорему.

Следствия: $\alpha \cdot \beta \quad \alpha \cdot c \quad \alpha^n$ величины бесконечно малые

- Функция $f(x)$ называется бесконечно большой в точке a ($\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$) если

$$\forall M \ \exists \delta(M) > 0 : \forall x : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M$$

Связь между пределами и бесконечно малыми величинами

- Теорема 1. (прямая)

  Если переменная величина u стремится к пределу a, то разность между нею и ее пределом есть величина бесконечно малая.

  Доказательство

  Пусть $a = \lim u$. Это значит, что при всяком $\varepsilon > 0$, будет справедливо неравенство $|u - a| < \varepsilon$ при достаточном продолжении изменения u. Но тогда величина $u - a$ есть величина бесконечно малая.

- Теорема 2. (обратная)

  Если переменная величина u равна сумме некоторой постоянной величины A и величины бесконечно малой α, то эта постоянная есть предел переменной.

  Пример: $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x+1}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} 1 + \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} = 1$ $\qquad \dfrac{x+1}{x} = 1 + \dfrac{1}{x} = A + \alpha$

Теоремы о пределах

- Переменная величина может иметь только один предел.
- Переменная величина, имеющая предел, является величиной ограниченной.
- Предел алгебраической суммы любого числа переменных равен алгебраической сумме их пределов.
- Предел произведения любого определенного числа переменных равен произведению их пределов.
- Если переменная величина имеет предел, отличный от нуля, то начиная с некоторого момента она принимает значение того знака, каков знак ее предела.
- Если предел переменной величины отличен от нуля, то величина ей обратная, является ограниченной величиной.
- Предел частного двух переменных равен частному от деления их пределов, если предел делителя отличен от нуля.

Признаки существования

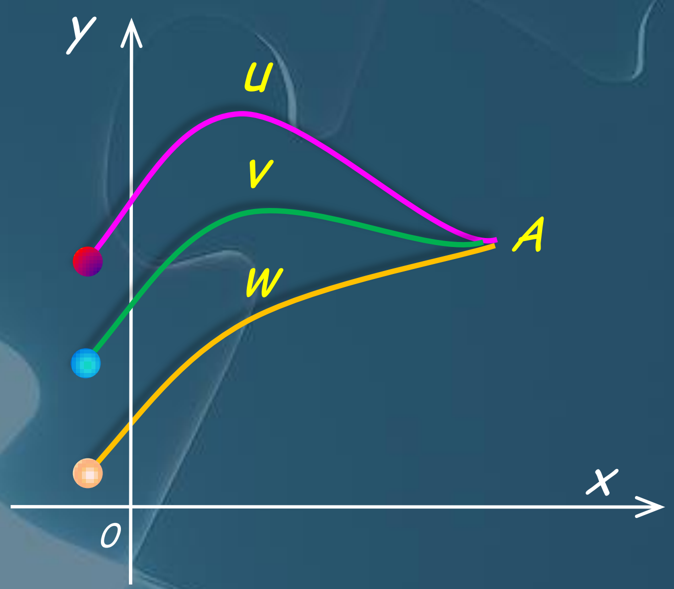
- Теорема 1.

Всякая монотонно изменяющаяся и ограниченная в направлении своего изменения величина имеет предел.

Доказательство ведется на основе теоремы Дедекинда.

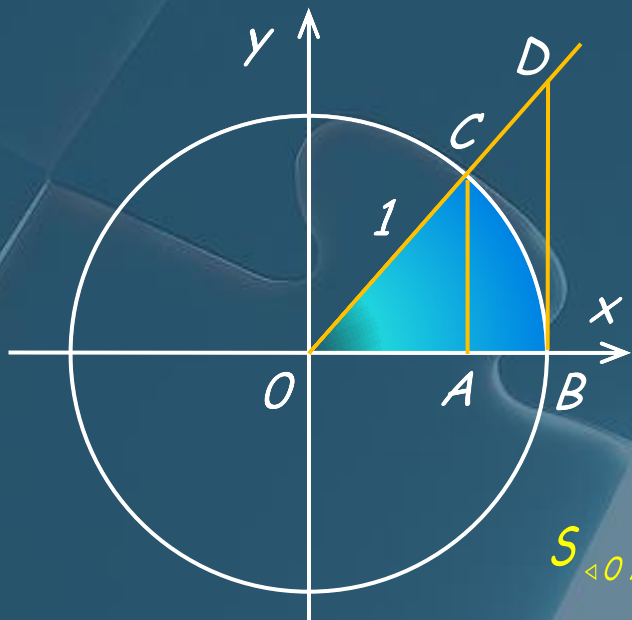
- Теорема 2.

Если числовые значения переменной величины v постоянно заключены между соответствующими числовыми значениями двух других переменных u и w и эти последние стремятся к одному и тому же пределу a, то к этому же пределу a стремится и переменная v.



- Функция $y = \dfrac{\sin x}{x}$ при $x \to 0$ имеет предел, равный 1: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$

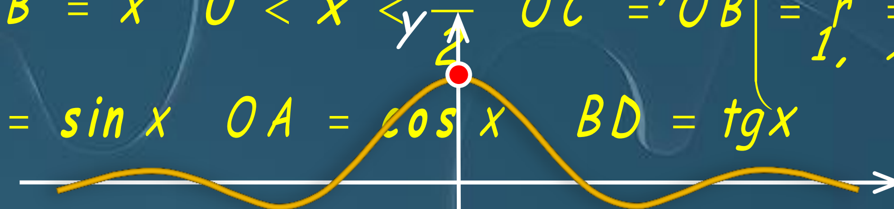
Рассмотрим единичную окружность.



Неопределенность $\left[\dfrac{0}{0}\right]$

$\angle COB = x \quad 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \quad OC = OB = r = 1$

$AC = \sin x \quad OA = \cos x \quad BD = tg x$



$$y = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

Сравнивая площади треугольника *OAC*, сектора *OBC* и треугольника *OBD*, получаем

$$S_{\triangleleft OAC} < S_{OBC} < S_{\triangleleft OBD} \qquad \frac{1}{2}\sin x\cos x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \qquad \lim_{x\to 0}:\ 1 \le \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \le 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

@ Найти предел $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tgx}{x}$

Решение

$$\lim_{x \to 0} \frac{tgx}{x} \Rightarrow \left[\frac{0}{0}\right] \Rightarrow \lim_{x \to 0}\left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}\right) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot \frac{1}{\cos 0} = 1$$

- Функция $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ при $x \to \infty$ имеет предел, равный e: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ Неопределенность $[1^\infty]$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Пусть $x \to +\infty$ Величину x заключим между n и $n+1$

$$n+1 > x \geq n \Rightarrow \frac{1}{n} \geq \frac{1}{x} \geq \frac{1}{n+1} \Rightarrow$$

$$1+\frac{1}{n} \geq 1+\frac{1}{x} \geq 1+\frac{1}{n+1} \Rightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{x}\right)^x > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = e$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

По второй теореме (признак существовании пределов):
При $x \to -\infty$ доказывается то-же самое.

@ Найти предел $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$

Решение

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \Rightarrow \left[\frac{0}{0}\right] \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \ln(1+x) \Rightarrow$$

$$\lim_{x \to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} \Rightarrow \ln\left(\lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right) \Rightarrow \ln(e) = 1$$

Сравнение бесконечно малых величин

- Если предел отношения двух бесконечно малых есть число, отличное от нуля

$\lim \frac{\alpha}{\beta} = q \neq 0$ то α и β называются *бесконечно малыми одного порядка малости*..

Пример: $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{7x} = \frac{2}{7} \lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{2x} = \frac{2}{7} \cdot 1 = \frac{2}{7}$$

$\sin 2x$ и $7x$ - бесконечно малые одного порядка малости

- Если предел отношения двух бесконечно малых α и β равен нулю

$\lim \frac{\alpha}{\beta} = 0$ то α называются *бесконечно малой более высокого порядка малости*, чем β.

Пример: $$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x} = \lim_{x \to 0} \sin \frac{x}{2} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 0 \cdot 1 = 0$$

$1-\cos x$ - бесконечно малая более высокого порядка, чем x. .

Сравнение бесконечно малых величин

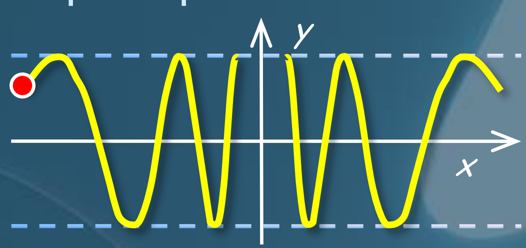
- Если отношения двух бесконечно малых α и β является величиной $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \infty$ бесконечно большой, то α называется бесконечно малой более низкого порядка малости, чем β.

  Пример: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{tgx}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}\right) = \infty\cdot 1\cdot 1 = \infty$

  $tg\,x$ - бесконечно малая более низкого порядка, чем x^2.

- Если предел отношения двух бесконечно малых α и β не существует (ни конечный, ни бесконечный), α и β называются *несравнимыми бесконечно малыми*.

  Пример: $\alpha = \sin x\cdot\sin(1/x)$ и $\beta = x$ - несравнимые бесконечно малые.



$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\,\sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x} = 1\cdot ?$$

Сравнение бесконечно малых величин

- Если предел отношения двух бесконечно малых α и β равно 1, $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 1$ то α и β называется равносильными (эквивалентными) бесконечно малыми . Символическое обозначение: $\alpha \sim \beta$

- Две бесконечно малые α и β, равносильные порознь третей бесконечно малой γ, равносильны между собой. $\alpha \sim \gamma \; V \; \beta \sim \gamma \; -> \; \alpha \sim \beta$.

- Разность двух равносильных бесконечно малых $\alpha - \beta$ является бмв более высокого порядка малости, чем каждая из них. $Lim\,(\alpha - \beta)/\alpha = 0$, $Lim\,(\alpha - \beta)/\beta = 0$

- Если разность двух бесконечно малых $\alpha - \beta$ есть бмв высшего порядка по сравнению с одной из них, то они равносильны. $Lim\,(\alpha - \beta)/\alpha = 0 \; -> \alpha \sim \beta$.

- Предел отношения двух бесконечно малых сохраняет свое значение при замене этих бесконечно малых им равносильными.

- Сумма конечного числа бесконечно малых различных порядков равносильна слагаемому низшего порядка малости (если оно единственно).

Пример

@ Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{10x+3\sin^2 x+\sqrt[3]{tg^5 x}}{2tgx+4x^3+\sin^4 x}$

Решение

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\sin^2 x}{10x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{10}=0 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{tg^5 x}}{10x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^2}}{10}=0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x^3}{2tgx}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2\cos x}{1}=0 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin^4 x}{2tgx}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{2}=0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{10x+3\sin^2 x+\sqrt[3]{tg^5 x}}{2tgx+4x^3+\sin^4 x}=\lim_{x\to 0}\frac{10x}{2tgx}=\lim_{x\to 0}\frac{10x}{2x}=5$$

Раскрытие неопределенностей

- Вычисление пределов в следующих ситуациях :

$$\underbrace{\left[\frac{\infty}{\infty}\right] \quad \left[\frac{0}{0}\right]}$$

$$\lim\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$$

- Правило Лопиталя
- Преобразование отношения с целью снять неопределенность

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

- $[1^{\infty}] \Rightarrow \left(e^{\infty\cdot\ln 1}\right) = \left(e^{[\infty\cdot 0]}\right)$

$[\infty^{0}] \Rightarrow \left(e^{0\cdot\ln\infty}\right) = \left(e^{[0\cdot\infty]}\right)$

$[0^{0}] \Rightarrow \left(e^{0\cdot\ln 0}\right) = \left(e^{[0\cdot\infty]}\right)$

$$\lim\left(f(x) - g(x)\right)$$

- $[\infty - \infty] \Rightarrow \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ или $\left[\frac{0}{0}\right] \Leftarrow [0\cdot\infty]$
- $\lim\left(f(x)\cdot g(x)\right)$

0 - бесконечно малая величина ∞ - бесконечно большая величина

@ Найти предел $\lim\limits_{x\to 0+}(x)^x$

Решение

Правило Лопиталя

$$\lim_{x\to 0+}(x)^x \Rightarrow \left[0^0\right] \Rightarrow e^{\lim\limits_{x\to 0+} \ln x \cdot x} = e^{\lim\limits_{x\to 0+}\left(\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\right)} \boxed{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]} = e^{\lim\limits_{x\to 0+}\left(\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to 0+}\left(\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to 0+}(-x)} = 1$$