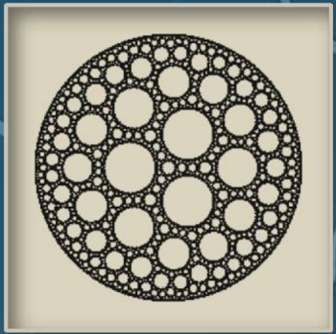
ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ



{ определение дифференциала функции - дифференцируемость функции - правила дифференцирования - инвариантность формы дифференциала - дифференциал в приближенных вычислениях – примеры }

Определение дифференциала функции

- Пусть $f: X \to Y,\ X \subseteq R$ функция, определенная и непрерывная в точке x_0 принадлежащей (a, b). Если $\Delta y = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$, то функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой в точке x_0, а выражение $A \cdot \Delta x$ – дифференциалом функции dy.

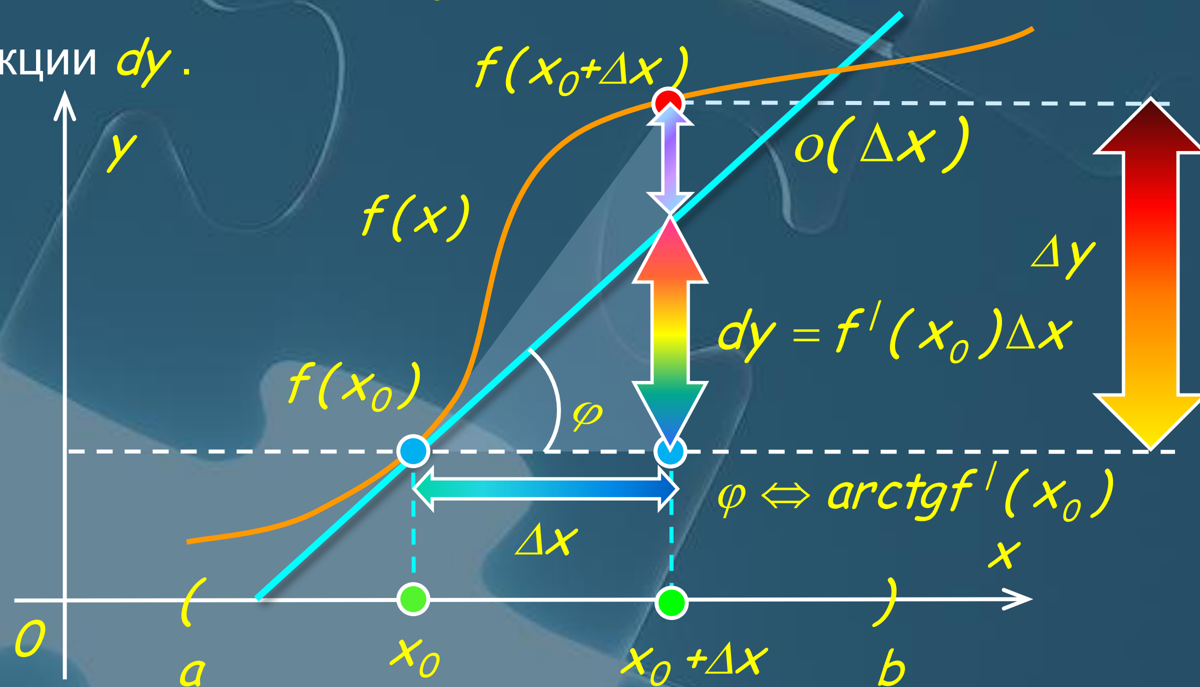
$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$$

$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x)$$

$$\Delta y = dy + o(\Delta x)$$

$$dy = f'(x_0)dx$$



Дифференцируемость функции

- Для того чтобы функция $y = f(x)$ в точке x_0 была дифференцируема, необходимо и достаточно, чтобы для неё в этой точке существовала конечная производная $y' = f'(x_0)$. При выполнении этого условия равенство $\Delta y = A\cdot\Delta x + o(\Delta x)$ имеет место при значении постоянной A, равном производной $f'(x_0)$.

Необходимость:

Из $\Delta y = A\cdot\Delta x + o(\Delta x) \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \underset{\Delta x\to 0}{\Rightarrow} A = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$

Итак $dy = f'(x_0)\Delta x$

При $y = x$ $dy = dx = 1\cdot\Delta x \Rightarrow dy = f'(x_0)dx$

$$dy = f'(x)dx$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

Правила нахождения дифференциала

- Пусть функции f и g определенны на $[a; b]$ и дифференцируемы в точке $x \in [a; b]$. Тогда в этой точке дифференцируемы $f+g$, $f \cdot g$, f/g

$$d(f(x) \pm g(x)) = df(x) \pm dg(x) \qquad d(c \cdot g(x)) = c \cdot dg(x)$$

$$d(f(x) \cdot g(x)) = df(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot dg(x)$$

$$d\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{df(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot dg(x)}{(g(x))^2} \qquad (g(x) \neq 0)$$

Таблица дифференциалов

$$d(x^a) = ax^{a-1}dx \qquad d(a^x) = a^x \ln a \, dx \qquad d(\log_a x) = \frac{1}{\ln a}\frac{1}{x}dx$$

$$d(\sin x) = \cos x dx \qquad d(\sqrt{x}) = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \qquad df(x) = f^{/}(x)dx$$

Инвариантность формы дифференциала

- Пусть функция *g(f(x))* дифференцируема в точке *y = f(x)*, а функция *f* дифференцируема в точке *x*. Тогда дифференциал функции *g(f(x))* может быть найден по следующему правилу

$$d(g(f(x))) = g'(x)dx = g'_f(f)f'_x dx = g'_f(f)df$$

Форма дифференциала первого порядка не меняется

$$d(g(f(x))) = (g(f(x)))' dx = g'(x)dx$$

$$d(g(f(x))) = g'_f \cdot f'_x dx = g'_f df$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \qquad \frac{d(g(f(x)))}{dx} = \frac{dg}{df}\frac{df}{dx}$$

Пример

@ *Найти дифференциал функции* $\arcsin(e^{\sin x})$

$$d\left(\arcsin\left(e^{\sin x}\right)\right) \Rightarrow$$

$$\frac{d\left(\arcsin\left(e^{\sin x}\right)\right)}{dx}dx \Rightarrow$$

$$= \frac{e^{\sin x}\cos x}{\sqrt{1 - e^{2\sin x}}}dx$$

Дифференцианциал в приближенных вычислениях

- Дифференциал dy представляет собой главную часть бесконечно малого приращения функции $\Delta y = dy + o(\Delta x)$

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \cong df = f'(x_0) \cdot \Delta x$$

с точностью до бесконечно малой высшего порядка..

Формула для приближенных вычислений:

$$f(x) \cong f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$$
$$f(x) \cong f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Пример:

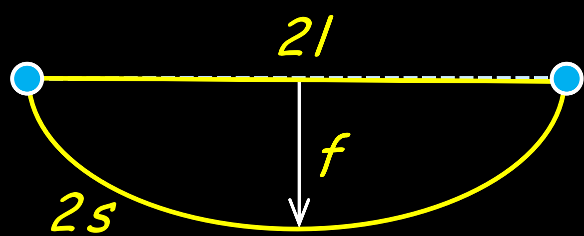
$$(1+x)^{\mu} \cong (1+x_0)^{\mu} + \mu(1+x_0)^{\mu-1} \cdot (x - x_0)$$

$x_0 = 0$ $\quad (1+x)^{\mu} \cong 1 + \mu x \quad e^x \cong 1 + x \quad \sin x \cong x$

$\sqrt{1+x} \cong 1 + \frac{x}{2} \quad \ln(1+x) \cong x \quad tgx \cong x$

Пример

@ *Вывести приближенную формулу для изменения стрелы провисания тяжелой нити при изменении её длины*



$$s = l + \frac{2}{3} \cdot \frac{f^2}{l}$$

$$\Delta s \cong ds = d\left(l + \frac{2}{3} \cdot \frac{f^2}{l} \right) = \frac{4}{3} \frac{f}{l} \cdot \Delta f$$

$$\Delta f \approx \frac{3}{4} \frac{l}{f} \cdot \Delta s$$