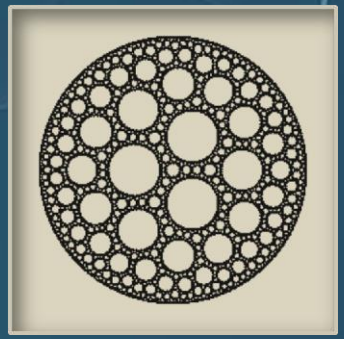
ТЕОРЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

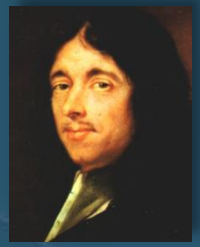


{ теорема Ферма - теорема Дарбу - теорема Ролля - теорема Лагранжа – теорема о среднем значении - геометрическое истолкование теоремы о среднем - теорема Коши - формула конечных приращений - правило Лопиталя – производные и дифференциалы высших порядков - примеры }

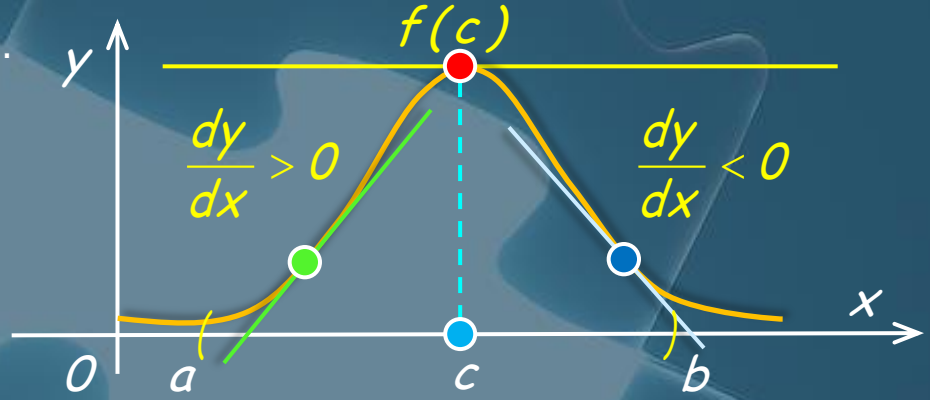
Горячев В.Д. Лекции по математическому анализу

Теорема Ферма

- Лемма. Пусть функция $f(x)$ имеет конечную производную в точке x_0. Если эта производная $f'(x_0) > 0 \quad (f'(x_0) < 0)$, то для значений x, достаточно близких к x_0 справа будет справедливо $f(x) > f(x_0) \quad (f(x) < f(x_0))$, а для значений x_0 слева - $f(x) < f(x_0) \quad (f(x) > f(x_0))$.
- Теорема. Пусть функция $f(x)$ определена в некотором промежутке (a, b) и во внутренней его точке c принимает наибольшее (наименьшее) значение. Если существует двусторонняя конечная производная $f'(c)$ в этой точке, то необходимо $f'(c) = 0$.



Pierre de Fermat
1601 - 1665

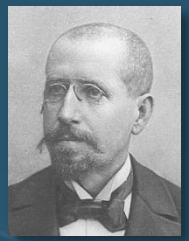


$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=c} = 0$$

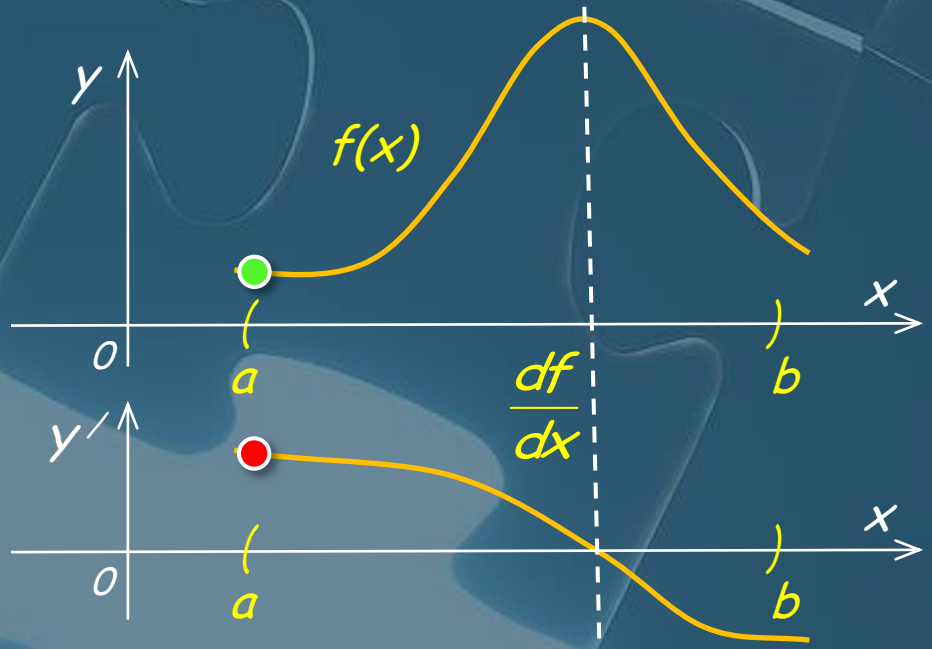
Теорема Дарбу

- Теорема. Пусть функция $f(x)$ имеет конечную производную в промежутке (a,b) - $\frac{df}{dx}$, эта производная функция принимает промежуточные значения между значениями в точках a и b .

Michel Rolle
1652 - 1719



Jean Gaston Darboux
1842 - 1917

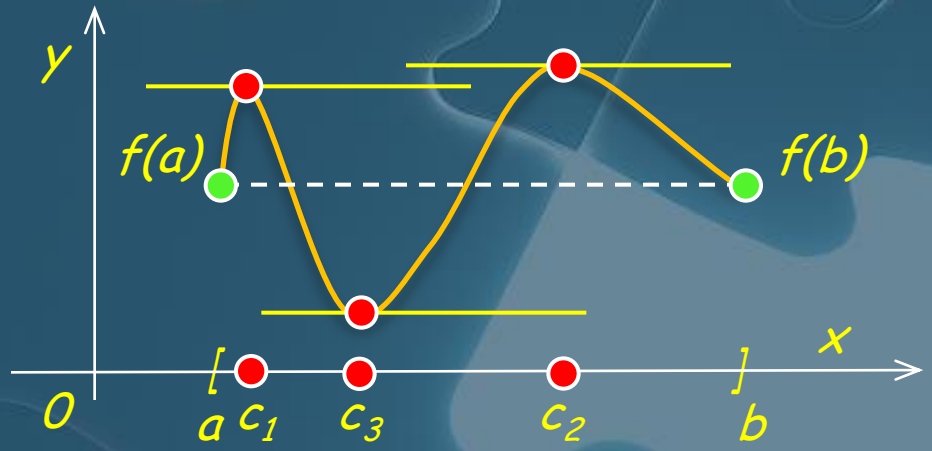


Теорема Ролля

Теорема. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$, в промежутке существует конечная производная $f'(x)$, на концах отрезка функция принимает равные значения: $f(a) = f(b)$. Тогда в промежутке (a, b) найдется точка $c\ (a < c < b)$, в которой $f'(c) = 0$.

Доказательство

По второй теореме Вейерштрасса функция, непрерывная на отрезке принимает на нем наименьшее m и наибольшее значение M.



$$M = m \Rightarrow f(x) = const$$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \quad \forall c \in [a; b]$$

$$M > m \qquad f(a) = f(b)$$

По теореме Ферма

$$\exists c \in [a; b] \quad f'(c) = 0 \quad \square$$

Теорема Лагранжа – теорема о среднем значении

Теорема. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$, в промежутке существует конечная производная $f'(x)$. Тогда в промежутке $(a; b)$ найдется точка $c\ (a < c < b)$, такая что для неё выполняется равенство:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Доказательство

Зададим $F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$ $\#$ $F(a) = F(b)$

Функция определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$, в промежутке существует конечная производная $F'(x)$, на концах отрезка функция принимает равные значения: $F(a) = F(b)$. Следовательно существует точка c, в которой $F'(c) = 0$.

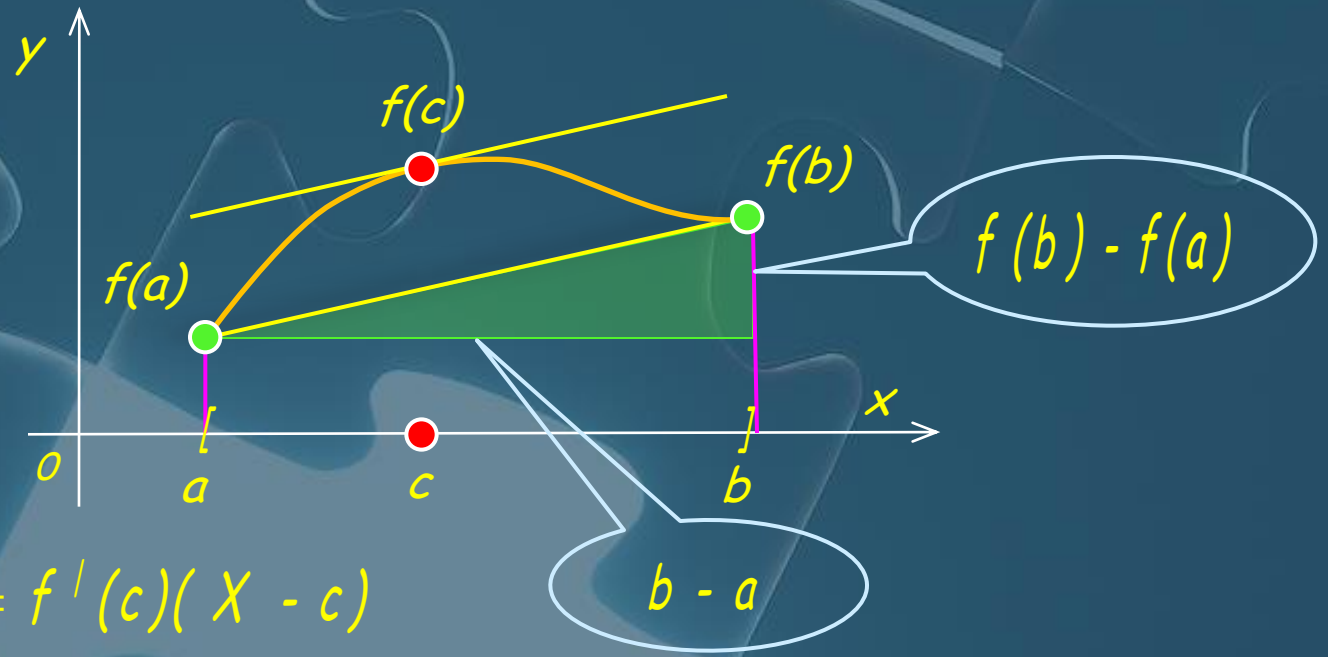
$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

□

Геометрическое истолкование теоремы о среднем

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

$$Y-f(a)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(X-a)$$



$$Y-f(c)=f'(c)(X-c)$$

Теорема Коши – формула конечных приращений

Теорема. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, в промежутке существует конечная производная $f'(x)$ и $g'(x)$, последняя величина не обращается в ноль на (a, b). Тогда в этом промежутке найдется точка $c\ (a < c < b)$, такая что для неё выполняется равенство:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Частный случай теоремы Коши – теорема Лагранжа. Для доказательства необходимо положить $g = x$.

Формула может быть использована для нахождения пределов, с неопределенностью типа :

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \to \infty}} \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow \left[\frac{0}{0}\right] \vee \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \Rightarrow \lim_{\substack{x \to a \\ x \to \infty}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Правило Лопиталя

- Раскрытие неопределенностей типа $\left[\frac{0}{0}\right]$ и $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Теорема. Пусть функции $f, g : [a, b] \to R$ дифференцируемы в точке a, $f(a) = g(a) = 0$ и производная $g'(a) \neq 0$. Тогда

$$\exists \lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)} \quad \left\{ \exists \lim_{x \to a-0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)} \quad \exists \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)} \right\}$$

Теорема. Пусть функции $f, g : [a, b] \to R$ и выполнены условия: a) $\exists f', g' \quad x \in (a; b)$ b) $f(x), g(x) \to 0 \quad при \quad x \to a + 0$ c) $g'(x) \neq 0 \quad при \quad x \in (a; b)$ d) $\exists \lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in [R]$

Тогда существует и предел $\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Правило Лопиталя

Теорема. Пусть функции $f, g : [a; \infty) \to R$ и выполнены условия:

a) $\exists f', g' \quad x \in (a; +\infty)$

b) $f(x), g(x) \to 0 \quad при \quad x \to +\infty$

c) $g'(x) \neq 0 \quad при \quad x \in (a; +\infty)$

d) $\exists \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \in [R]$

Тогда существует и предел $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \Rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

@ Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$

Решение

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}\Rightarrow\left[\frac{0}{0}\right]\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{(a^x-1)'}{x'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{a^x\ln a}{1}=a^x\Big|_{x=0}\ln a=\ln a$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}\Rightarrow\left[\frac{0}{0}\right]\Rightarrow\left\langle a^x-1=t,\ x=\log_a(1+t),\ x\to 0,\ t\to 0\right\rangle\Rightarrow$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{t}{\log_a(1+t)}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\log_a(1+t)^{\frac{1}{t}}}=\frac{1}{\log_a\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}}=\frac{1}{\log_a e}=\ln a$$

Производные высших порядков

- Если функция $f(x)$ дифференцируема при всех $x \in (a; b)$, то мы можем рассмотреть функцию $f' : (a, b) \to R$, сопоставляющую каждой точке x значение производной $f'(x)$. Эта функция f' называется производной функции f, или первой производной от f. Саму исходную функцию называют нулевой производной и обозначают как $f^{(0)}(x)$.
Функцию $g_1 = f'(x)$ можно дифференцировать и получить вторую производную $g'_1 = f''(x)$. Если предположить, что вторая производная существует на множестве $x \in (a; b)$, то можно найти третью производную, четвертую и т.д.

$$f(x) \Rightarrow f'(x) \Rightarrow f''(x) \Rightarrow f'''(x) \Rightarrow \ldots\ldots f^{(n)}(x) \Rightarrow$$

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))' \qquad \frac{d^n f}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}}\right)$$

@ *Найти производную второго порядка* $x^2 - y^2 = 1$

Решение

$$x^2 - y^2 = 1 \qquad \frac{dy}{dx} = ? \quad \frac{d^2y}{dx^2} = ?$$

$$x^2 - y^2 = 1 \Rightarrow 2x - 2y\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\,\frac{dy}{dx}}{dx} \qquad \frac{dy}{dx}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1 \cdot y - \frac{dy}{dx}x}{y^2} = \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{y^3}$$

$$= \frac{y - x\frac{x}{y}}{y^2} = \frac{y^2 - x^2}{y^3} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y^2 - x^2}{y^3}$$

@ *Найти производную второго порядка для заданной в параметрической форме функции*

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$$

Решение

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = ? \quad \frac{d^2y}{dx^2} = ? \quad \frac{dy}{dx} = \frac{(\sin t)'_t}{(\cos t)'_t} = -\frac{\cos t}{\sin t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)'_t}{x'_t} = \frac{\left(-\frac{\cos t}{\sin t}\right)'_t}{(\cos t)'_t} =$$

$$= -\frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\sin^3 t} = -\frac{1}{\sin^3 t} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{\sin^3 t}$$

Дифференциалы высших порядков

- Используя определение дифференциала функция $df(x)$ первого порядка можно найти дифференциалы старших порядков, при дифференцировании полагая, что dx (дифференциал аргумента) есть величина постоянная.

$$df = f'(x)dx$$

$$d^2f = d(df) = d(f'(x)dx) = (f''(x)dx)dx = f''(x)dx^2$$

$$d^3f(x) = d(d^2f) = (f''(x)dx^2)'dx = f'''(x)dx^3$$

$$d^nf(x) = d(d^{n-1}f) = (f^{(n-1)}(x)dx^{n-1})'dx = f^{(n)}(x)dx^n$$

$$d^nf = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}dx^{n-1}\right)dx = \frac{d^nf}{dx^n}dx^n \qquad d^nf(x) = \frac{d^nf(x)}{dx^n}dx^n$$

@ *Найти дифференциал второго порядка функции* $ln(x^2+1)$

Решение

$$y = ln(x^2+1) \Rightarrow d^2y = d(d(ln(x^2+1))) =$$

$$= d\left(\frac{2x}{x^2+1}dx\right) = \left(\frac{2x}{x^2+1}\right)' dx^2 =$$

$$= \left(\frac{2x}{x^2+1}\right)' dx^2 = \frac{2(x^2+1)-2x(2x)}{(x^2+1)^2}dx^2 \Rightarrow$$

$$d^2y = \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}dx^2$$

Формула Тейлора

$$f(x) = T_n(x) + o((x-a)^n) =$$

$$= A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + .. + A_n(x-a)^n + R_n(x)$$

$$T_n(a) = A_0 = f(a) \qquad A_0 = f(a)$$

$$f'(x) \Rightarrow T_n'(x) = A_1 + 2A_2(x-a) + ... + nA_n(x-a)^{n-1}$$

$$f'(a) \Rightarrow T_n'(a) = A_1 \qquad A_1 = f'(a)$$

$$f''(x) \Rightarrow T_n''(x) = 2A_2 + ... + (n-1)nA_n(x-a)^{n-2}$$

$$f''(a) \Rightarrow T_n''(a) = 2A_2 \qquad A_2 = \frac{f''(a)}{1 \cdot 2}$$

$$f^{(n)}(x) \Rightarrow T_n^{(n)}(x) = 1 \cdot 2 \cdots (n-1)nA_n \qquad A_n = \frac{f^{(n)}(a)}{1 \cdot 2 \cdots n} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

Формула Тейлора

$\Delta f = f'(x_0)\cdot\Delta x + o(\Delta x)$ $\qquad f(x) - f(a) = df(x) + o(x-a)$

Линейная аппроксимация функции: $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$

- Представление функции в виде многочлена n – ой степени, коэффициенты которого определяются производными соответствующего порядка.

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x) \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x)\big|_{x=0}}{k!}x^k + R_n(x)$$

$a = 0$ Формула Маклорена

Остаточный член:

в форме Лагранжа $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},\ 0 < \theta < 1$

в форме Пеано $R_n(x) = o((x-a)^n)$ при $x \to a$

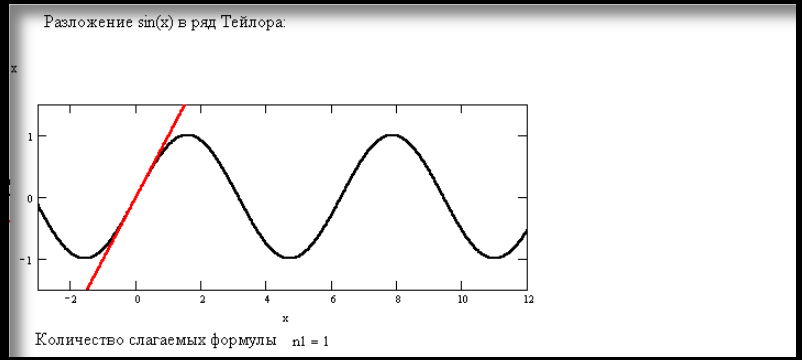
@ Представить функцию многочленом Тейлора $f(x) = \sin(x)$

$$T_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}}{n!}x^n$$

$$T_n(x) = \sin(x)\big|_{x=0} + \frac{\cos(x)\big|_{x=0}}{1!}x - \frac{\sin(x)\big|_{x=0}}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\sin^{(n)}(x)\big|_{x=0}}{n!}x^n$$

$$a_n = \begin{cases} 0, & n = 2k, k = 0,2,\ldots \\ \dfrac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} & n = 2k-1, k = 1,3,\ldots \end{cases}$$

$$\frac{\sin^{(2k+1)}(\theta x)}{(2k+1)!}x^{2k+1}, 0 < \theta < 1$$



$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \frac{x^9}{362880} \pm \ldots$$

Многочлены Тейлора для функций Sin(x) и Cos(x)

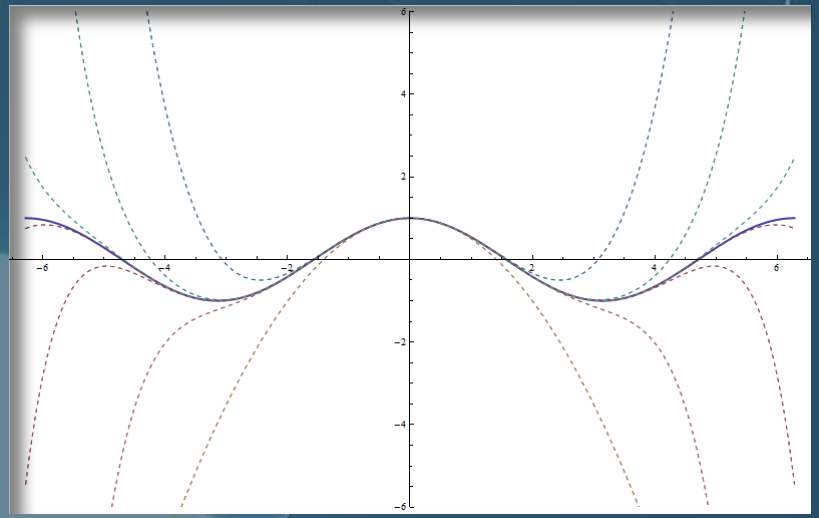
$$\sin(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n-1}(x)$$

$$\left|R_{2n-1}(x)\right| < \frac{1}{(2n)!}|x|^{2n} \quad \to 0 \quad (n \to \infty, \forall x)$$

$$\cos x = \frac{d \sin x}{dx} =$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \pm ..$$

$$+ R_{2n}(x)$$



Формулы Тейлора для некоторых функций

- $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x), \quad R_n(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}, \; 0 < \theta < 1$

- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n,$

  $R_n(x) = \frac{(-1)x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}, \; 0 < \theta < 1, \; |R_n(x)| \le \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (x \in [0;1])$

- $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + R_n(x), \quad x \in (-1;1)$