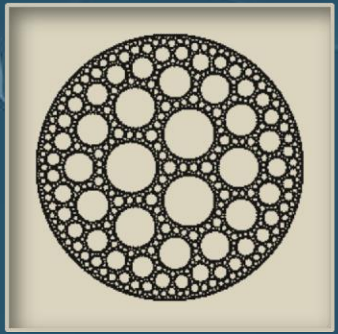
ИССЛЕДОВАНИЕ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИИ



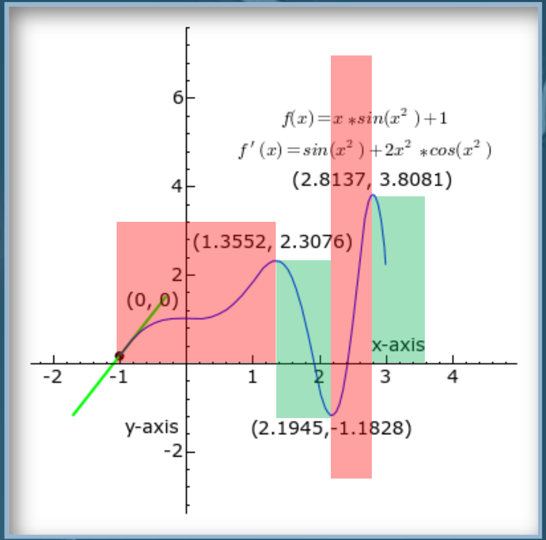
{ интервалы монотонного возрастания и убывания функции - выпуклость функции на промежутке - точки перегиба - асимптоты - построение графика функции }

Интервалы возрастания и убывания функции

- Интервалы монотонного возрастания и убывания функции определяются знаком производной.

Если производная $f'(x)$ положительна на интервале, то функция $f(x)$ возрастает на нем.

$$\Delta x > 0,\ \Delta f > 0 \ \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x) > 0$$



Если производная $f'(x)$ принимает отрицательные значения на интервале, то функция $f(x)$ на нем убывает.

Выпуклость функции на промежутке

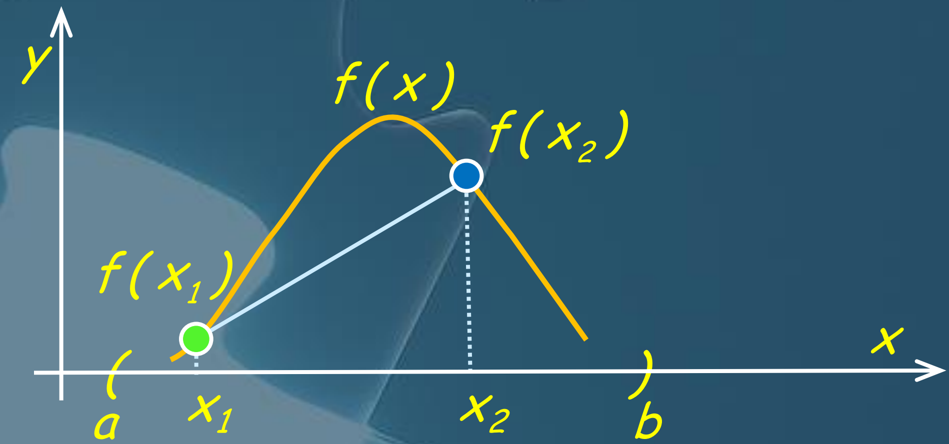
- Функция $f(x)$, определенная и непрерывная в промежутке (a,b), называется выпуклой (выпуклой вниз), если для любых точек x_1 и x_2 из (a,b), x_1 не равно x_2, выполняется неравенство:

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \le \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

каковы бы не были положительные числа λ_1 и λ_2, дающие в сумме единицу.

При $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \ge \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$ функция $f(x)$ называется вогнутой (выпуклой вверх).

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \ge \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$



Выпуклость функции на промежутке

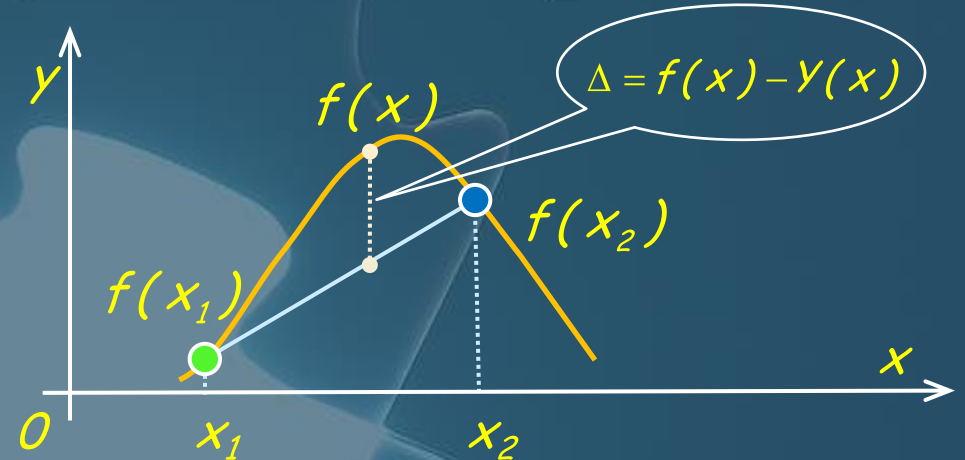
$$\Delta = f(x) - \left(f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{(x_2 - x_1)}(x - x_1)\right) > 0$$

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{(x_2 - x_1)} > 0 \qquad x \to x_1 \qquad c \in (x_1, x_2)$$

$$f'(x_1) - f'(c) \geq 0 \qquad \frac{f'(x_1) - f'(c)}{x_1 - c} \leq 0 \qquad \lim_{x_1 \to c} \frac{f'(x_1) - f'(c)}{x_1 - c} = f''(c) \leq 0$$

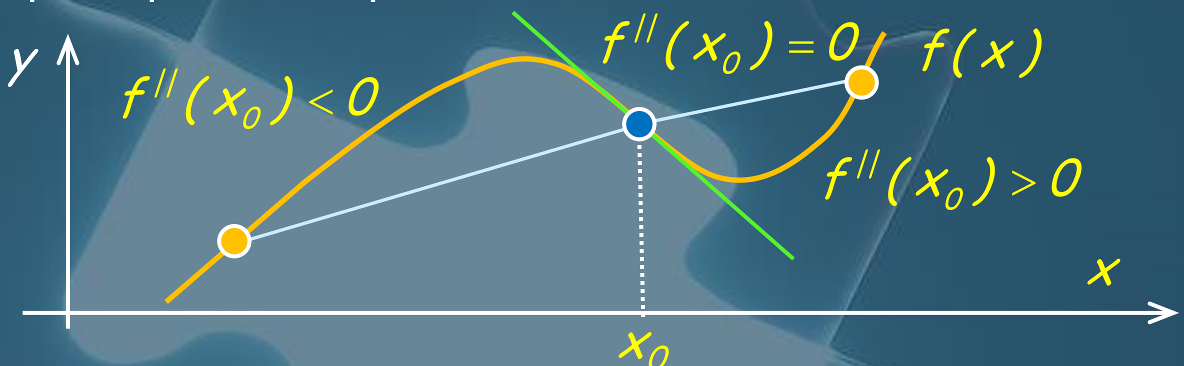
Функция $f(x)$ называется вогнутой (выпуклой вверх), если $f''(x) \leq 0$

Функция $f(x)$ называется выпуклой (выпуклой вниз), если $f''(x) \geq 0$



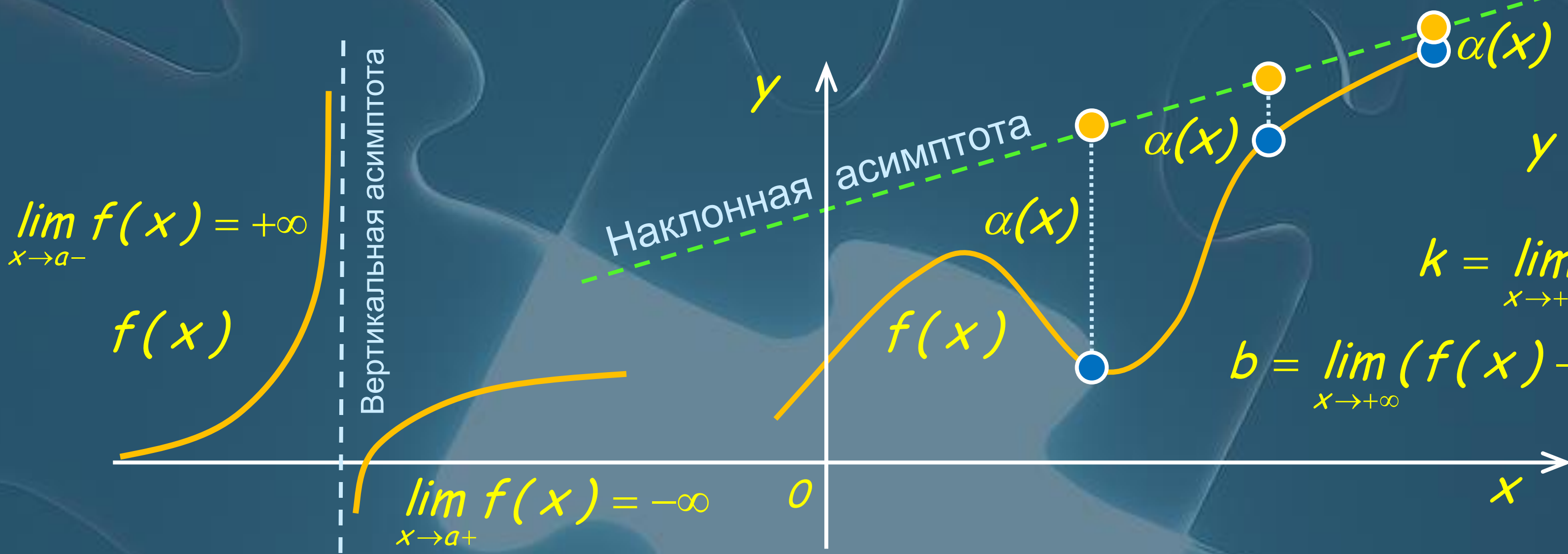
Точки перегиба

- Теорема. Для выпуклости (вогнутости) функции $y = f(x)$ в промежутке (a,b) необходимо и достаточно, чтобы здесь выполнялось неравенство $f''(x) \geq 0 \quad (f''(x) \leq 0)$.
- Точку $M(x_0, f(x_0))$ кривой $y = f(x)$ называют её точкой перегиба, если она отделяет участок графика, где он выпуклый, от участка, где график функции $f(x)$ вогнут.
- В точке перегиба вторая производная функции обращается в ноль. Достаточным условием существования точки перегиба является смена знака $f''(x)$ при переходе через неё.



Асимптоты графика функции

- Прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to a-} f(x)$ равен $+\infty$ или $-\infty$.
- Прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой графика функции $f(x)$ при $x \to +\infty$, если $f(x)$ представима в виде $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ есть бесконечно малая при $x \to +\infty$ функция.



$y = kx + b$

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx)$$

Построение графика функции

- Для построения рекомендуется следующая последовательность действий.
  - Найти множество определения функции, области непрерывности, точки разрыва.
  - При построении графика учитывать такие свойства, как четность, нечетность, периодичность.
  - Найти асимптоты графика функции.
  - Найти точки пересечения графика с осями координат.
  - Найти первую и, если нужно, вторую производную функции. Найти точки в которых первая и вторая производные либо не существуют, либо обращаются в нуль.
  - Составить таблицу изменения знака функции, первой и второй производных. Определить промежутки возрастания и убывания функции, выпуклости и вогнутости функции, найти точки экстремума и точки перегиба, вычислить значения функции в этих точках.
  - Окончательно вычертить график функции.

Пример построения графика функции

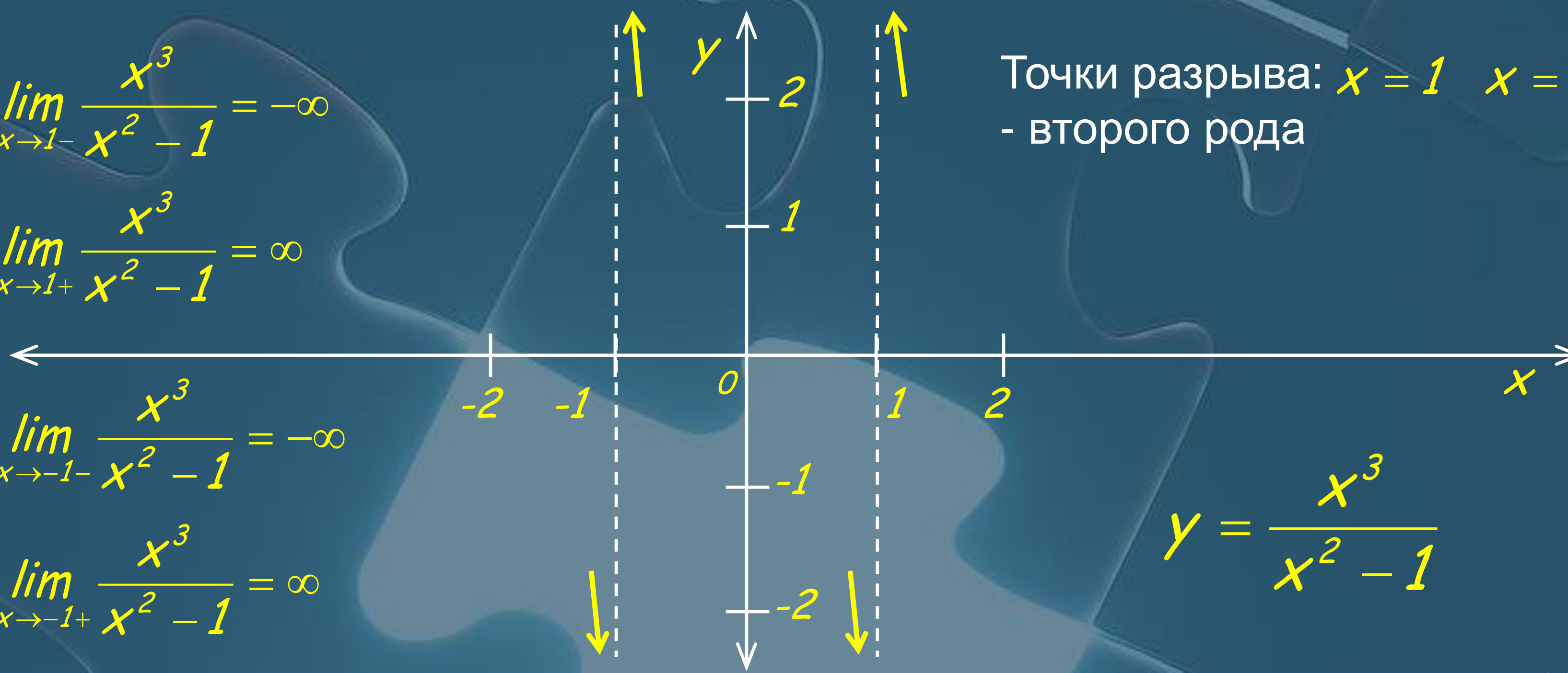
Исследуем и строим график функции $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$. Функция нечетная.

- Найти множество определения функции, области непрерывности, точки разрыва:

$$x^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow D: x \neq \pm 1 \quad \Rightarrow D: x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$$

$$\lim_{x \to 1-} \frac{x^3}{x^2 - 1} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1+} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \infty$$



Точки разрыва: $x = 1$ $x = -1$
- второго рода

$$\lim_{x \to -1-} \frac{x^3}{x^2 - 1} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -1+} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \infty$$

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

Пример построения графика функции

- Найти нули функции, наклонные (горизонтальные) асимптоты.

$$y=\frac{x^3}{x^2-1}\quad\Rightarrow\quad y=x$$

$$y=\frac{x^3-x+x}{x^2-1}=\frac{x(x^2-1)+x}{x^2-1}=x+\frac{x}{x^2-1}$$

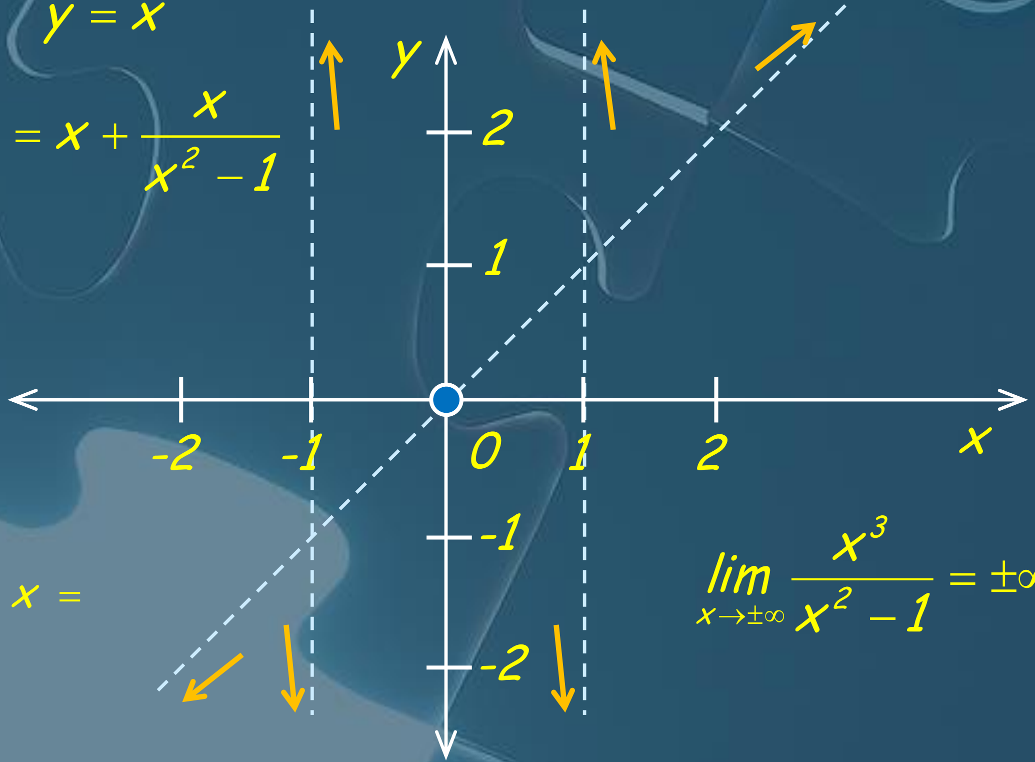
$$y(0)=\left.\frac{x^3}{x^2-1}\right|_{x=0}=0$$

$$y=kx+b$$

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x(x^2-1)}=1$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^2-1}-x=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-1}=0$$



$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x^2-1}=\pm\infty$$

Пример построения графика функции

- Найти первую производную функции. Найти точки в которых первая производная либо не существует, либо обращается в нуль. Найти точки экстремума.

$$\left(\frac{x^3}{x^2-1}\right)' = \frac{3x^2(x^2-1)-x^3(2x)}{(x^2-1)^2} =$$

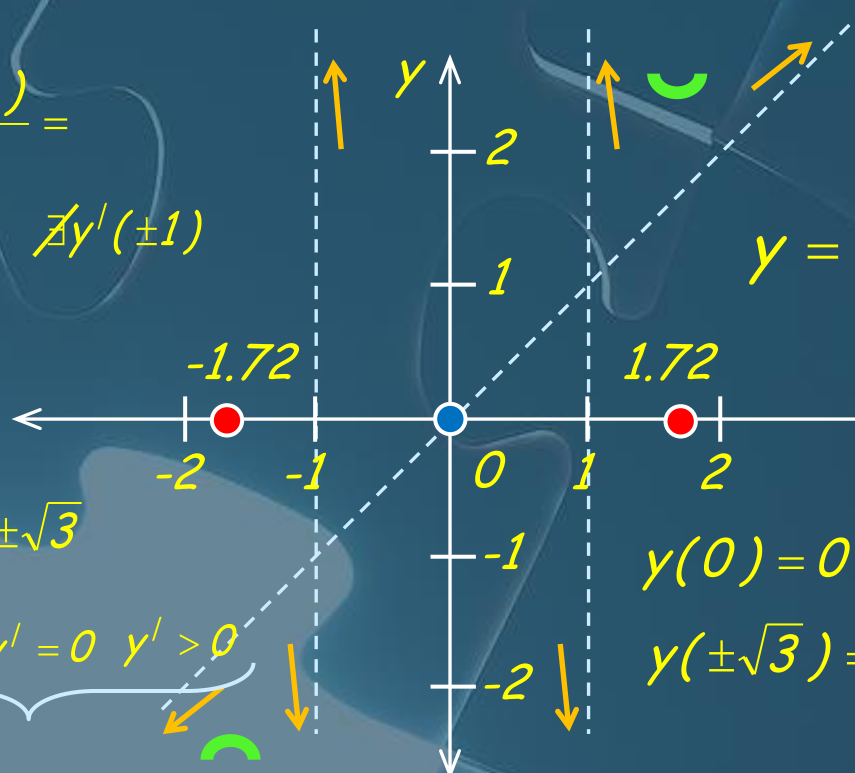
$$= \frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x^2-3)}{(x-1)^2(x+1)^2}$$

$\nexists y'(\pm 1)$

$$y'(x) = \frac{x^2(x^2-3)}{(x-1)^2(x+1)^2} = 0$$

$$x^2(x^2-3) = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 0, x_{3,4} = \pm\sqrt{3}$$

$y' > 0 \quad y' = 0 \quad y' < 0 \quad y' = 0 \quad y' < 0 \quad y' = 0 \quad y' > 0$



$$y = \frac{x^3}{x^2-1}$$

$$y(0) = 0$$

$$y(\pm\sqrt{3}) = \frac{\pm 3\sqrt{3}}{2}$$

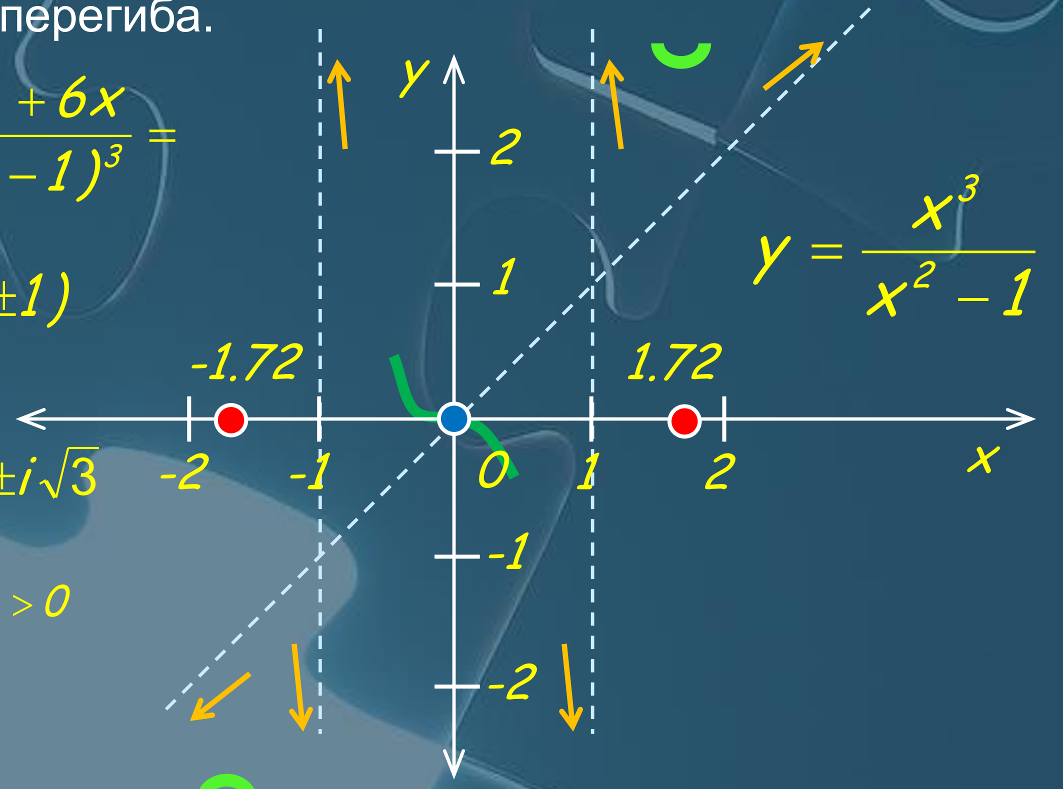
- Найти вторую производную функции. Найти точки в которых вторая производная либо не существует, либо обращается в нуль. Найти промежутки выпуклости, точки перегиба.

$$y''(x)=\left[\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}\right]'=\frac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3}=$$

$$=\frac{2x(x^2+3)}{(x-1)^3(x+1)^3}\qquad \nexists\, y''(\pm 1)$$

$$x(x^2+3)=0\Rightarrow x_1=0,\, x_{2,3}=\pm i\sqrt{3}$$

$$\begin{cases} y''(x<-1)<0 \quad & y''(-1<x<0)>0 \\ y''(0<x<1)<0 \quad & y''(x>1)>0 \end{cases}$$



Пример построения графика функции

- Построить график функции

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$