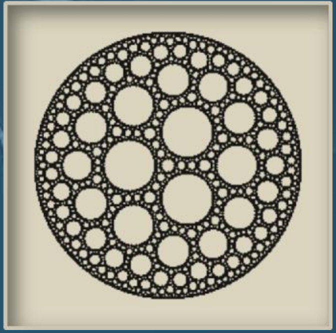
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

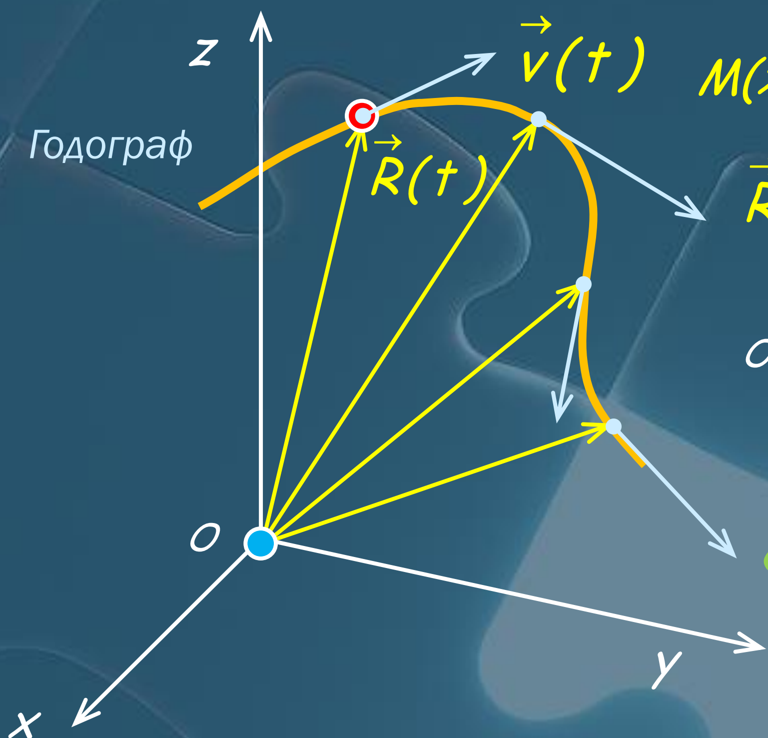


[вектор-функция скалярного аргумента – дифференцирование вектор-функции – годограф – соприкасающаяся плоскость – главная нормаль и бинормаль – кривизна линии – кручение линии – основные формулы дифференциальной геометрии – формулы Френе и сопровождающий трехгранник – длина дуги линии – плоские линии – приложения из механики – примеры]

Горячев В.Д. Лекции по математическому анализу

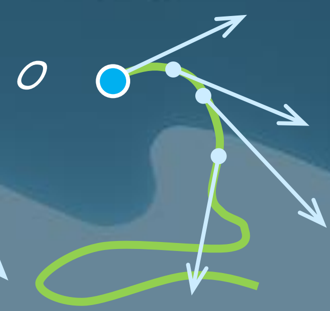
Вектор-функция скалярного аргумента

- Переменный вектор $\vec{R}$ называется функцией скалярного аргумента t, если каждому значению скаляра t из области допустимых значений соответствует определенное значение функции $\vec{R}(t)$.



$$M(x,y,z) = M(x(t),y(t),z(t)) = M(t)$$

$$\vec{R}(t) = \vec{i}\,R_x(t) + \vec{j}\,R_y(t) + \vec{k}\,R_z(t)$$



Предел вектор-функции

$$\lim_{t\to T}\vec{R}(t) = \vec{A}$$

$$|t-T| < \delta \Rightarrow \left|\vec{R}(t) - \vec{A}\right| < \varepsilon(\delta)$$

Непрерывность вектор-функции

$$\lim_{t\to T}\vec{R}(t) = \vec{R}(T)$$

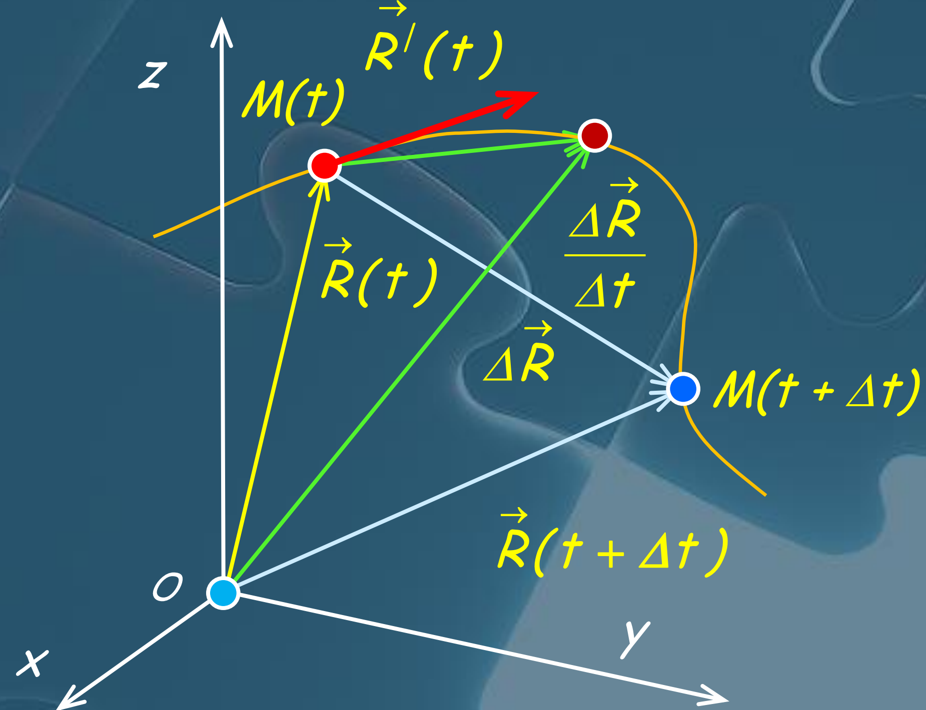
Дифференцирование вектор-функции

- Производной вектор-функции $\vec{R}(t)$ называется предел $\vec{R}'(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \vec{R}}{\Delta t}$

$$\Delta \vec{R} = \vec{R}(t+\Delta t) - \vec{R}(t)$$

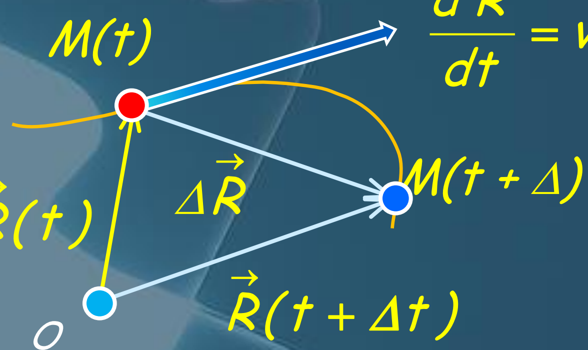
$$\frac{\Delta \vec{R}}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \to 0} \Rightarrow \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{R}}{\Delta t} = \frac{d\vec{R}}{dt}$$

$$\vec{R}'(t) = \vec{i}\,R_x'(t) + \vec{j}\,R_y'(t) + \vec{k}\,R_z'(t)$$



Механический смысл производной

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{v}(t)$$



Правила дифференцирования вектор-функции

- Правила дифференцирования векторных функций скалярного аргумента совпадают с правилами дифференцирования для скалярных функций, но учитывают то, что функции векторные.

$$(\vec{u}+\vec{v}-\vec{w})' = \vec{u}'+\vec{v}'-\vec{w}' \qquad (\varphi\vec{u})' = \varphi'\vec{u}+\varphi\vec{u}'$$

$$(\vec{u}\cdot\vec{v})' = \vec{u}'\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{v}' \quad (\vec{u}\times\vec{v})' = \vec{u}'\times\vec{v}+\vec{u}\times\vec{v}' \quad (\vec{R}(s(t)))' = \vec{R}_s'\, s_t'$$

Дифференциал $d\vec{R}(t) = \vec{R}'(t)dt$

Свойство инвариантности $d\vec{R}(s(t)) = \vec{R}'_t\, dt = \vec{R}'_s\, s_t' dt = \vec{R}'(s)ds$

Формула Тейлора $\vec{R}(t+\Delta t) = \vec{R}(t) + \frac{\Delta t}{1!}\vec{R}'(t) + \frac{(\Delta t)^2}{2!}\vec{R}''(t) + \ldots + $

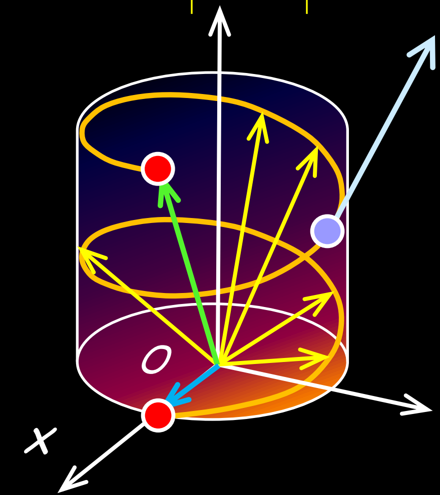
$$+\frac{(\Delta t)^n}{n!}\vec{R}^{(n)}(t) + (\Delta t)^n(\vec{i}\,\alpha_n + \vec{j}\,\beta_n + \vec{k}\,\gamma_n)$$

Пример

@ *Найти производную вектор-функции* $\vec{r}(t) = \vec{i}\,a\cos t + \vec{j}\,a\sin t + \vec{k}\,ht$ *и построить годограф для* $0 \le t \le 4\pi$

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = ht \end{cases} \quad 0 \le t \le 4\pi \qquad \left|\vec{r}^{\,/}(t)\right| = \sqrt{a^2 + h^2}$$

Решение



$$\vec{r}(t) = \vec{i}\,a\cos t + \vec{j}\,a\sin t + \vec{k}\,ht$$

$$\left|\vec{r}(t)\right| = \sqrt{a^2(\cos^2 t + \sin^2 t) + h^2t^2} = \sqrt{a^2 + h^2t^2}$$

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{i}\,a\frac{d\cos t}{dt} + \vec{j}\,a\frac{d\sin t}{dt} + \vec{k}\,h\frac{dt}{dt} =$$

$$\vec{r}^{\,/}(t) = -\vec{i}\,a\sin t + \vec{j}\,a\cos t + \vec{k}\,h \qquad \left|\vec{r}(0)\right| = a \qquad \left|\vec{r}(4\pi)\right| = \sqrt{a^2 + 16\pi^2h^2}$$

Годограф вектор-функции

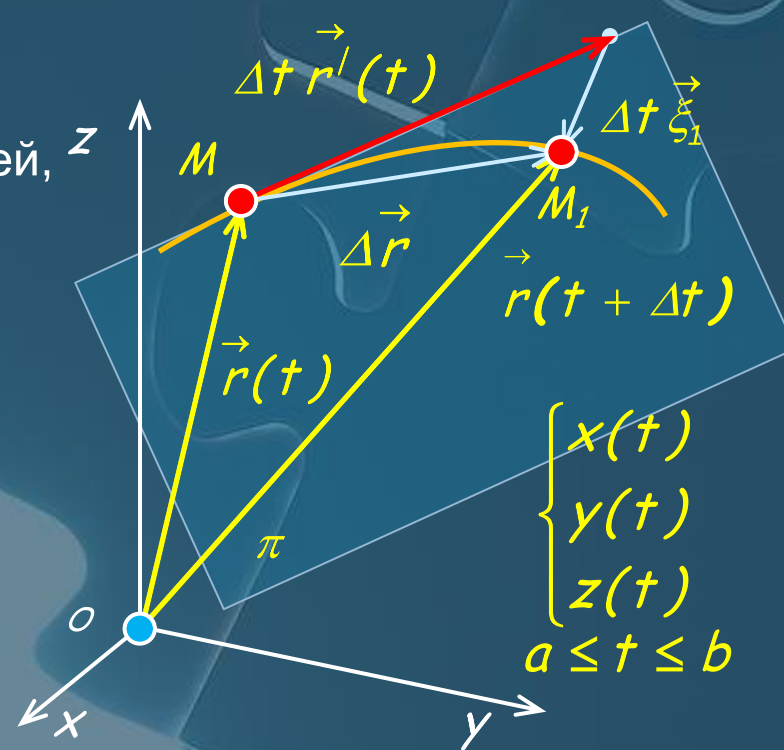
- Кривая (линия) может быть представлена как траектория точки M – конца вектора-функции скалярного аргумента, т.е. как *годограф вектор-функции*

$$\vec{r}(t)=\vec{i}\,x(t)+\vec{j}\,y(t)+\vec{k}\,z(t)$$

Касательной к линии в данной точке называется предельное положение секущей, проходящей через данную точку M и бесконечно близкую к ней точку линии.

$$\Delta\vec{r}=\frac{\Delta t}{1!}\vec{r}^{\,\prime}(t)+\frac{\Delta t}{1!}\vec{\xi}_1(t)$$

Соприкасающейся плоскостью кривой в точке M называется предельное положение плоскости, проходящей через касательную в данной точке M и через бесконечно близкую к ней точку.



Соприкасающаяся плоскость

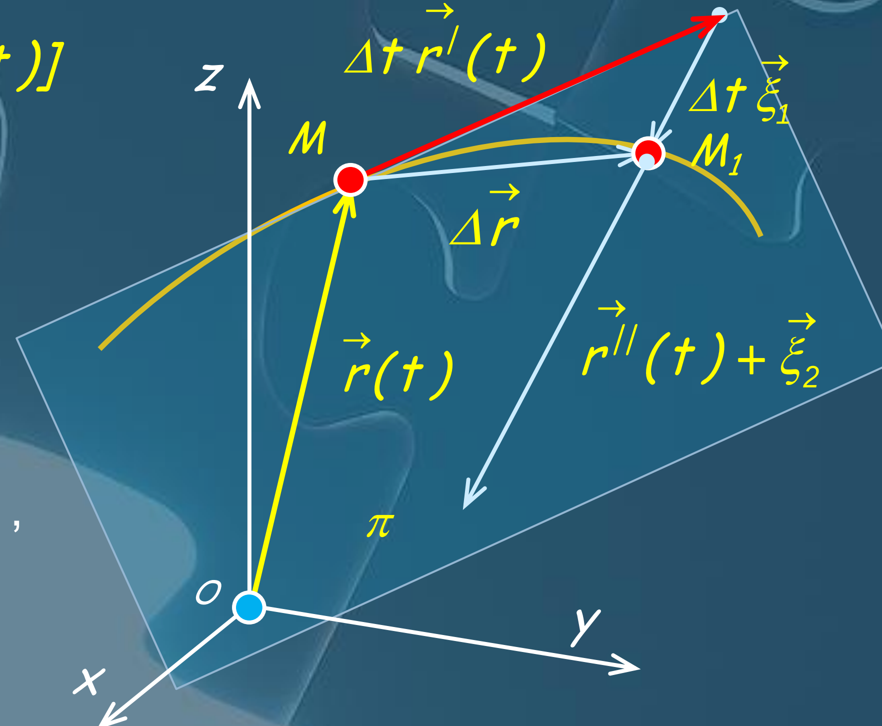
- Теорема Производные первого $\vec{r}'(t)$ и второго порядков $\vec{r}''(t)$ для $\vec{r}(t)$ располагаются в соответствующей соприкасающейся плоскости..

$$\Delta\vec{r} = \frac{\Delta t}{1!}\vec{r}'(t) + \frac{\Delta t^2}{2!}[\vec{r}''(t) + \vec{\xi}_2(t)]$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \vec{\xi}_2(t) = 0$$

$$\vec{r}''(t) + \vec{\xi}_2 = \frac{2}{\Delta t^2}[\Delta\vec{r} - \Delta t\,\vec{r}'(t)]$$

Таким образом вектор $\vec{r}''(t) + \vec{\xi}_2$ разлагается по векторам $\Delta\vec{r}$ и $\vec{r}'(t)$, которые лежат в соприкасающейся плоскости.

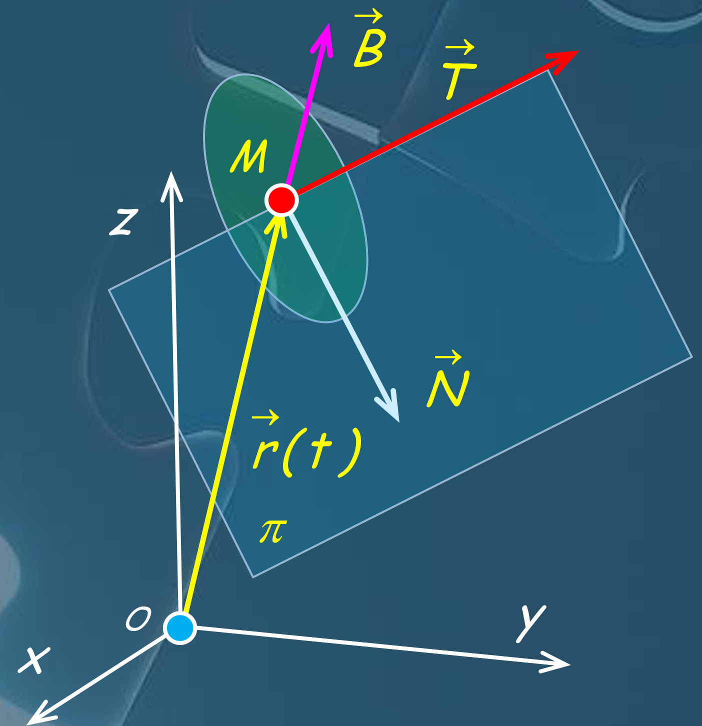


Главная нормаль и бинормаль

- Всякая прямая, проходящая через данную точку M пространственной кривой и *перпендикулярная касательной* в этой точке, называется *нормалью*.

Главной нормалью называется нормаль, которая лежит в *соприкасающейся плоскости*.

Бинормалью называется нормаль, которая *перпендикулярна вектору касательной и главной нормали*.



$$\vec{T} = \vec{r}'(t)$$

$$\vec{B} = \vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)$$

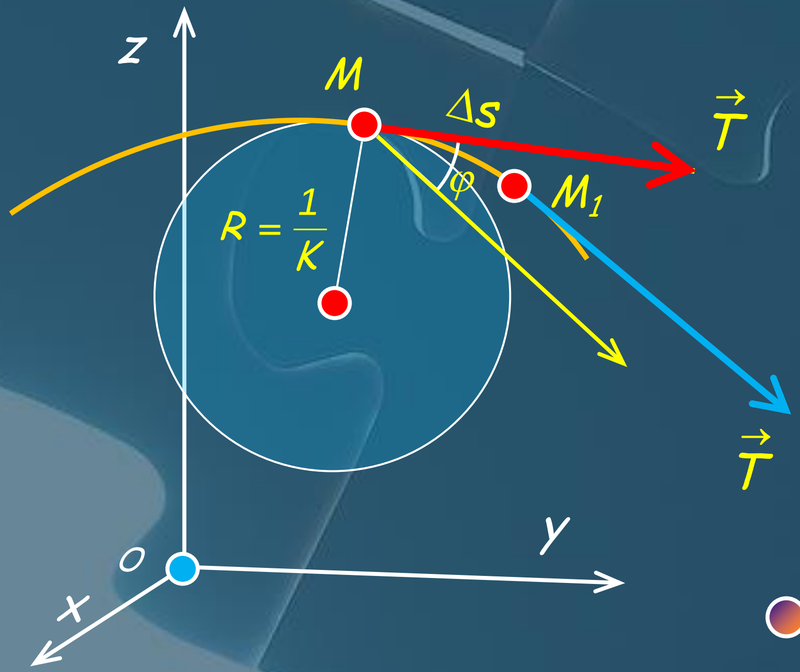
$$\vec{N} = [\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)] \times \vec{r}'(t)$$

Кривизна линии

- *Кривизной* K линии в данной точке M называется предел угла поворота касательной при переходе из M в бесконечно близкую точку M_1, отнесенный к бесконечно малой длине дуги $|\Delta s|$, заключенной между этими точками

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\varphi}{|\Delta s|}$$

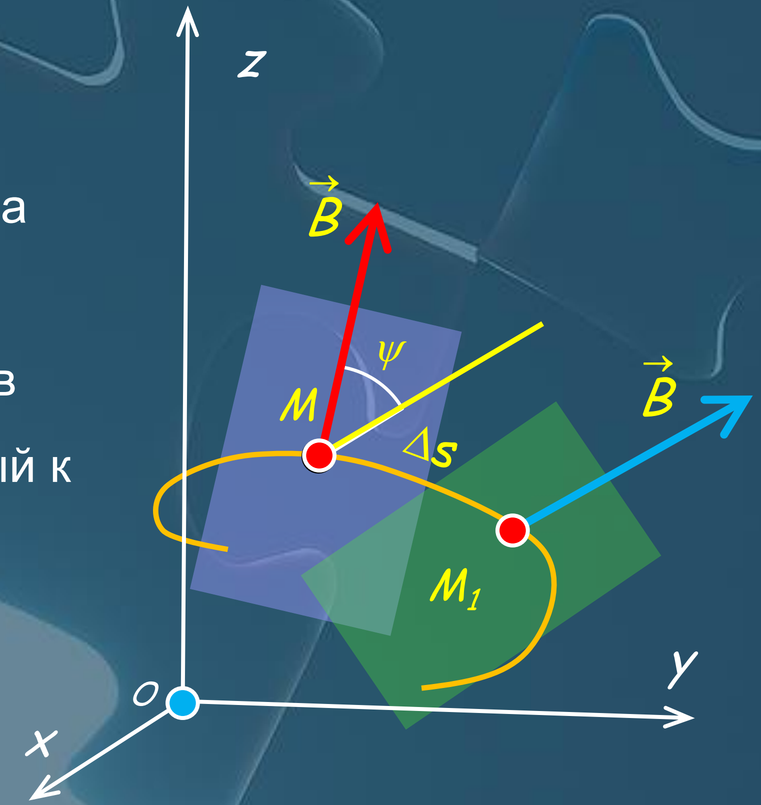
Радиусом круга кривизны называется радиус окружности, которая касается линии (лежит в соприкасающейся плоскости) и радиус которой связан с кривизной соотношением $R = \dfrac{1}{K}$



$$|\Delta s| = R\varphi \quad K = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\varphi}{|\Delta s|} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\varphi}{R\varphi} = \frac{1}{R}$$

- *Кручением* *T* линии в данной точке *M* пространственной кривой называется взятый с надлежащим знаком предел угла поворота соприкасающейся плоскости (вектора бинормали) при переходе из *M* в бесконечно близкую точку M_1, отнесенный к бесконечно малой длине дуги $|\Delta s|$, заключенной между этими точками

$$|T| = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\psi}{|\Delta s|}$$



Основные формулы дифференциальной геометрии

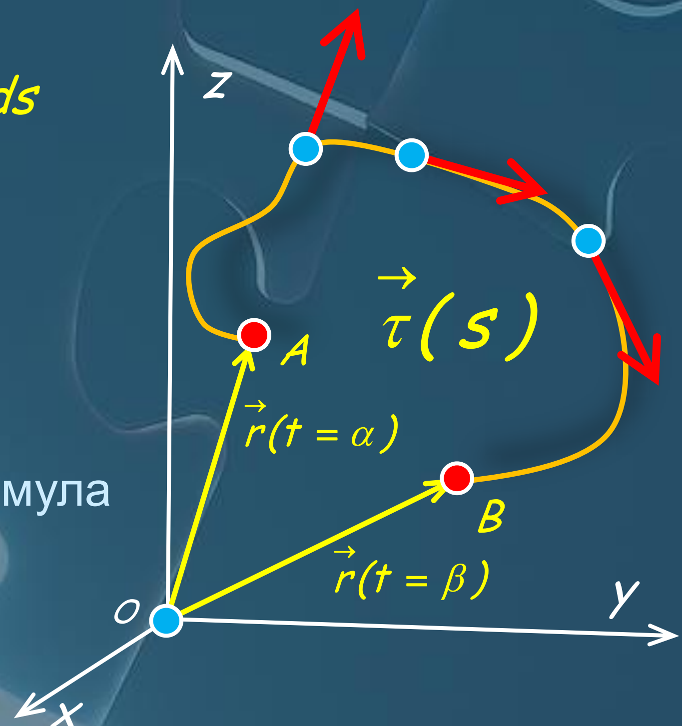
- *Вектор-функция* может быть представлена как функция дуги годографа :

$$\vec r(t)\quad \vec r(s(t))\quad s=s(t)\quad s: s(t=\alpha)\Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow s(t=\beta)\quad \vec r(s)$$

$$\frac{d\vec r}{dt}=\frac{d\vec r}{ds}\frac{ds}{dt}\qquad \frac{d\vec r}{ds}\Rightarrow\left|\frac{d\vec r}{ds}\right|=\frac{\left|d\vec r\right|}{|ds|}=1\qquad \left|d\vec r\right|=ds$$

$$\left|d\vec r\right|=ds=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$$

$$\left|d\vec r\right|=ds=\sqrt{x(t)'^2+y(t)'^2+z(t)'^2}\,dt$$



- *Орт касательной* Первая основная формула

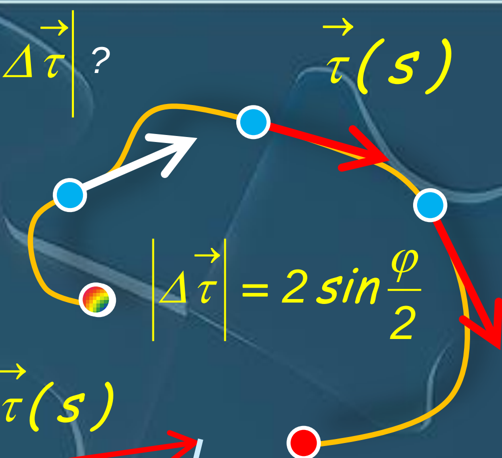
$$\frac{d\vec r}{dt}=\frac{d\vec r}{ds}\frac{ds}{dt}=\frac{d\vec r}{\left|d\vec r\right|}\frac{ds}{dt}=\vec\tau\frac{ds}{dt}$$

$$\vec\tau=\frac{d\vec r}{ds}$$

Основные формулы дифференциальной геометрии

- *Орт главной нормали*

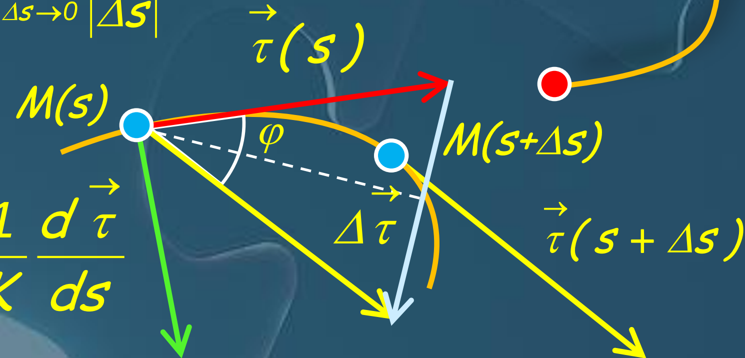
Геометрический смысл модуля $\left|\Delta\vec{\tau}\right|$?



Рассмотрим производную $\dfrac{d\vec{\tau}}{ds}$. *Направление вектора* $\dfrac{d\vec{\tau}}{ds}$?

$$\left|\frac{d\vec{\tau}}{ds}\right| = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\left|\Delta\vec{\tau}\right|}{|\Delta s|} = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{2\sin\frac{\varphi}{2}}{|\Delta s|} = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\frac{\varphi}{2}}\cdot\frac{\varphi}{|\Delta s|} = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\varphi}{|\Delta s|}$$

$$\left|\frac{d\vec{\tau}}{ds}\right| = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\varphi}{|\Delta s|} = K$$



$$\vec{\nu} = \frac{1}{K}\frac{d\vec{\tau}}{ds}$$

$$\vec{\tau}\cdot\vec{\tau} = 1 \qquad \frac{d\left(\vec{\tau}\cdot\vec{\tau}\right)}{ds} = 2\vec{\tau}\cdot\frac{d\vec{\tau}}{ds} = 0$$

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} \parallel \frac{\vec{N}}{\left|\vec{N}\right|} = \vec{\nu} \qquad \vec{\tau} \perp \frac{d\vec{\tau}}{ds}$$

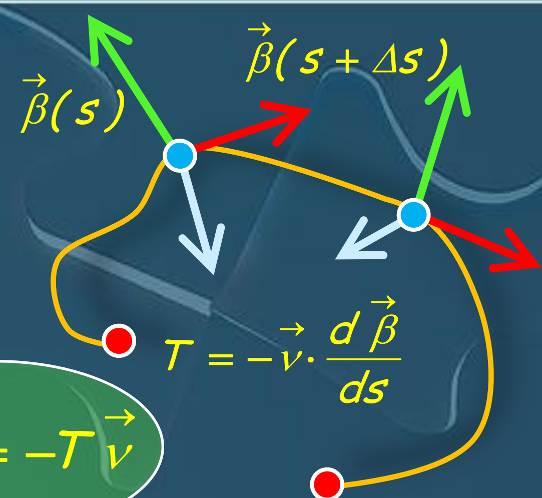
Вторая основная формула

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = K\vec{\nu}$$

Основные формулы дифференциальной геометрии

Орт бинормали

Направление вектора $\dfrac{d\vec{\beta}}{ds}$ *?*



Найдем орт бинормали $\vec{\beta}=\vec{\tau}\times\vec{\nu}$ $\qquad \dfrac{d\vec{\beta}}{ds}=?$

$$\vec{\beta}\cdot\vec{\beta}=1 \qquad 2\vec{\beta}\cdot\frac{d\vec{\beta}}{ds}=0 \qquad \vec{\beta}\perp\frac{d\vec{\beta}}{ds} \qquad \frac{d\vec{\beta}}{ds}\perp\vec{\tau}$$

$$T=-\vec{\nu}\cdot\frac{d\vec{\beta}}{ds}$$

$$\frac{d\vec{\beta}}{ds}=\frac{d\vec{\tau}}{ds}\times\vec{\nu}+\vec{\tau}\times\frac{d\vec{\nu}}{ds}=\underbrace{K\vec{\nu}\times\vec{\nu}}_{=0}+\vec{\tau}\times\frac{d\vec{\nu}}{ds}=\vec{\tau}\times\frac{d\vec{\nu}}{ds}$$

$$\frac{d\vec{\beta}}{ds}=-T\vec{\nu}$$

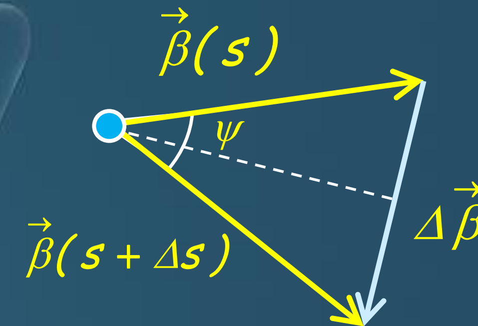
$$\frac{d\vec{\beta}}{ds}\ //\ \lambda\vec{\nu} \qquad \frac{d\vec{\beta}}{ds}=\lambda\vec{\nu}$$

Геометрический смысл λ *?*

Третья основная формула

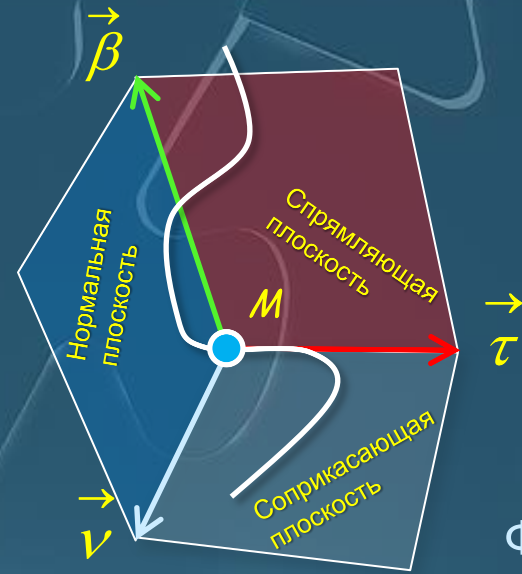
$$\left|\frac{d\vec{\beta}}{ds}\right|=|\lambda| \qquad \left|\Delta\vec{\beta}\right|=2\sin\frac{\psi}{2} \qquad |T|=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\psi}{|\Delta s|} \qquad \lambda=-T$$

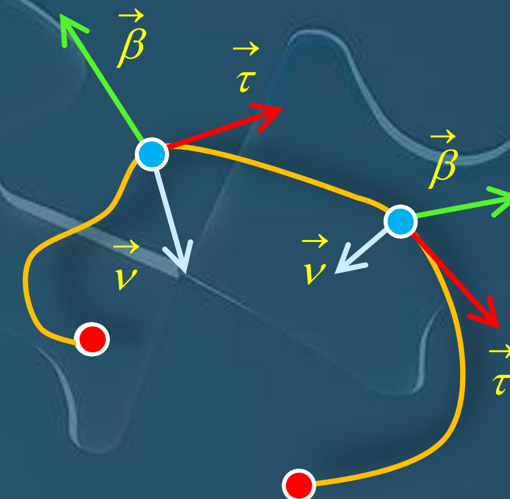
$$|\lambda|=\left|\frac{d\vec{\beta}}{ds}\right|=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\left|\Delta\vec{\beta}\right|}{|\Delta s|}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{2\sin\frac{\psi}{2}}{|\Delta s|}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\sin\frac{\psi}{2}}{\frac{\psi}{2}}\cdot\frac{\psi}{|\Delta s|}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\psi}{|\Delta s|}$$



Формулы Френе и сопровождающий трехгранник

- *Сопровождающим трехгранником*, связанным с точкой M пространственной кривой, называется трехгранник, ребрами которого являются касательная, нормаль и бинормаль.





Формулы Френе

$$\frac{d\vec{\nu}}{ds} = \frac{d\vec{\beta}}{ds} \times \vec{\tau} + \vec{\beta} \times \frac{d\vec{\tau}}{ds}$$

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\tau}$$

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = K\vec{\nu}$$

$$\vec{\nu} = \vec{\beta} \times \vec{\tau}$$

$$\frac{d\vec{\nu}}{ds} = -T\vec{\nu} \times \vec{\tau} + \vec{\beta} \times K\vec{\nu}$$

$$\frac{d\vec{\nu}}{ds} = -K\vec{\tau} + T\vec{\beta}$$

$$\frac{d\vec{\beta}}{ds} = -T\vec{\nu}$$

@ *Найти кривизну и кручение кривой - годографа вектор-функции*

$$\vec{r}(t)=\vec{i}\,a\cos t+\vec{j}\,a\sin t+\vec{k}\,h\,t$$

Решение

$$K=\left|\frac{d\vec{\tau}}{ds}\right| \qquad d\vec{r}=(-\vec{i}\,a\sin t+\vec{j}\,a\cos t+\vec{k}\,h)dt$$

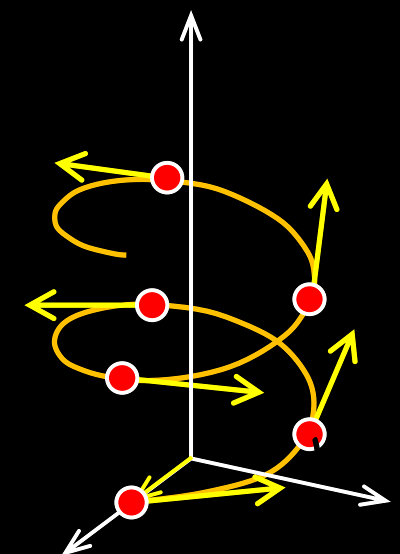
$$ds=\left|d\vec{r}\right|=\sqrt{a^2+h^2}\,dt$$

$$\vec{\tau}=\frac{d\vec{r}}{ds}=\frac{-\vec{i}\,a\sin t+\vec{j}\,a\cos t+\vec{k}\,h}{\sqrt{a^2+h^2}}$$

$$d\vec{\tau}=\frac{-\vec{i}\,a\cos t-\vec{j}\,a\sin t}{\sqrt{a^2+h^2}}dt$$

$$\left|\frac{d\vec{\tau}}{ds}\right|=\frac{\sqrt{a^2(\cos^2 t+\sin^2 t)}}{a^2+h^2}=\frac{a}{a^2+h^2}$$

$$\vec{\tau}=\frac{d\vec{r}}{ds}$$



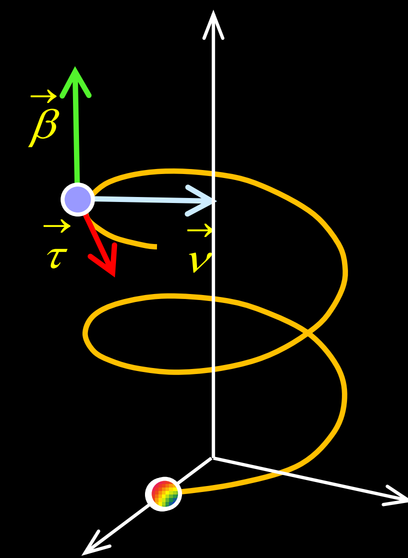
$$K=\frac{a}{a^2+h^2}$$

@ $\vec{r}(t)=\vec{i}\,a\cos t+\vec{j}\,a\sin t+\vec{k}\,h\,t \qquad T=?$

$$T=-\vec{\nu}\cdot\frac{d\vec{\beta}}{ds} \qquad \vec{\nu}=\frac{1}{K}\frac{d\vec{\tau}}{ds}=-\vec{i}\cos t-\vec{j}\sin t$$

$$\vec{\beta}=\vec{\tau}\times\vec{\nu}=\frac{1}{\sqrt{a^2+h^2}}\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -a\sin t & a\cos t & h\\ -\cos t & -\sin t & 0\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{\vec{i}\,h\sin t-\vec{j}\,h\cos t+\vec{k}\,a}{\sqrt{a^2+h^2}} \qquad d\vec{\beta}=\frac{\vec{i}\,h\cos t+\vec{j}\,h\sin t}{\sqrt{a^2+h^2}}dt$$



$$K=\frac{a}{a^2+h^2}$$

$$T=-\vec{\nu}\cdot\frac{d\vec{\beta}}{ds}=-\frac{(-\vec{i}\cos t-\vec{j}\sin t)\cdot(-\vec{i}\,h\cos t-\vec{j}\,h\sin t)}{a^2+h^2}=\frac{h}{a^2+h^2}$$

$$T=\frac{h}{a^2+h^2}$$

Инвариантные формулы

$$t=\varphi(t_1)\quad \vec{\mathbf r}(t)=\vec{\mathbf r}(t(t_1))$$

$$\frac{d\vec r}{dt_1}=\frac{d\vec r}{dt}\cdot\frac{dt}{dt_1}\qquad \frac{d^2\vec r}{dt_1^2}=\frac{d^2\vec r}{dt^2}\left(\frac{dt}{dt_1}\right)^2+\frac{d\vec r}{dt}\cdot\frac{d^2t}{dt_1^2}$$

$$\vec\tau=\frac{d\vec r}{dt}:\left|\frac{d\vec r}{dt}\right|\qquad \left|\frac{d\vec r}{dt_1}\right|=\left|\frac{d\vec r}{dt}\right|\cdot\frac{dt}{dt_1}$$

$$\frac{d^3\vec r}{dt_1^3}=\frac{d^3\vec r}{dt^3}\left(\frac{dt}{dt_1}\right)^3+3\frac{d^2\vec r}{dt^2}\cdot\frac{dt}{dt_1}\cdot\frac{d^2t}{dt_1^2}+\frac{d\vec r}{dt}\cdot\frac{d^3t}{dt_1^3}$$

Инвариантный вектор первого порядка: **орт касательной**

$$\frac{d\vec r}{dt_1}\times\frac{d^2\vec r}{dt_1^2}=\left(\frac{d\vec r}{dt}\times\frac{d^2\vec r}{dt^2}\right)\left(\frac{dt}{dt_1}\right)^3\qquad \frac{\left|\frac{d\vec r}{dt_1}\times\frac{d^2\vec r}{dt_1^2}\right|}{\left|\left(\frac{d\vec r}{dt_1}\right)\right|^3}=\frac{\left|\frac{d\vec r}{dt}\times\frac{d^2\vec r}{dt^2}\right|}{\left|\left(\frac{d\vec r}{dt}\right)\right|^3}$$

$$K=\frac{\left|\frac{d\vec r}{dt}\times\frac{d^2\vec r}{dt^2}\right|}{\left|\left(\frac{d\vec r}{dt}\right)\right|^3}\qquad \frac{\left|\frac{d\vec r}{ds}\times\frac{d^2\vec r}{ds^2}\right|}{\left|\left(\frac{d\vec r}{ds}\right)\right|^3}=\left|\vec\tau\times\frac{d\vec\tau}{ds}\right|=\left|\vec\tau\times K\vec\nu\right|=K$$

$$T=\frac{\left(\frac{d\vec r}{dt}\times\frac{d^2\vec r}{dt^2}\right)\cdot\frac{d^3\vec r}{dt^3}}{\left(\frac{d\vec r}{dt}\times\frac{d^2\vec r}{dt^2}\right)^2}$$

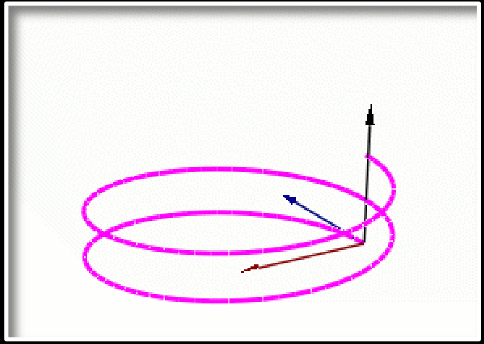
Инвариантная формула для вычисления кривизны

Инвариантная формула для вычисления кручения

@ *Найти кривизну кривой - годографа вектор-функции*

$$\vec{\mathbf{r}}(t)=\vec{i}\,a\cos t+\vec{j}a\sin t+\vec{k}h\,t$$

Решение



$$\vec{\mathbf{r}}(t)=\vec{i}\,a\cos t+\vec{j}a\sin t+\vec{k}h\,t$$

$$K=\frac{\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\times\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right|}{\left|\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)\right|^3}$$

$$K=\frac{a}{a^2+h^2}$$

$$K=\frac{\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -a\sin t & a\cos t & h\\ -a\cos t & -a\sin t & 0\end{vmatrix}}{\left(\sqrt{a^2+h^2}\right)^3}=\frac{\sqrt{a^2h^2\sin^2 t+a^2h^2\cos^2 t+a^2}}{\left(\sqrt{a^2+h^2}\right)^3}=\frac{a\sqrt{h^2+a^2}}{\left(\sqrt{a^2+h^2}\right)^3}=\frac{a}{a^2+h^2}$$

Длина дуги линии

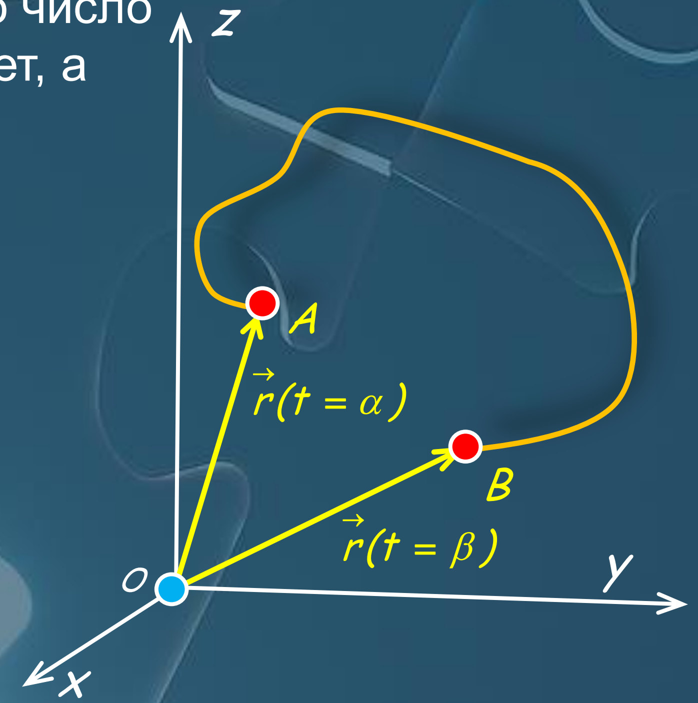
- *Длиной L* дуги линии называется предел длины вписанной в неё ломанной при условии, что число звеньев ломанной неограниченно возрастает, а максимум их длин стремится к нулю:

$$L=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left|\vec r(t_k)-\vec r(t_{k-1})\right| \quad t_0=\alpha, t_n=\beta$$

$$L=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\Delta\vec r_k=\int_{(L)}\left|d\vec r\right|=\int_{(L)}ds$$

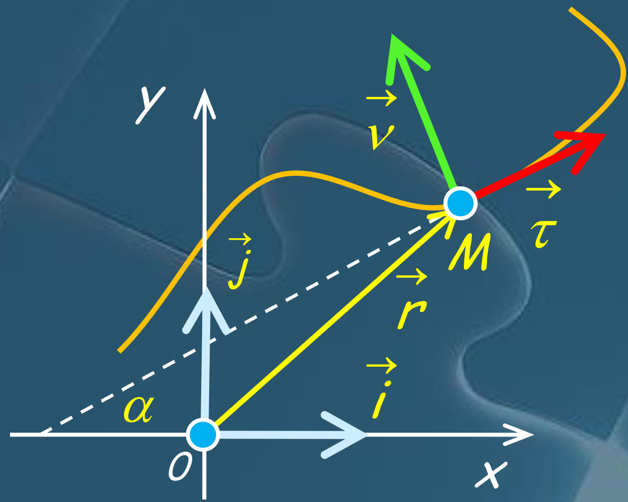
$$L=\int_{(L)}\left|d\vec r\right|=\int_{\alpha}^{\beta}\left|\vec r'\right|dt$$

$$L=\int_{\alpha}^{\beta}\left|\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\right|dt$$



Плоские линии

- Основные уравнения: $\dfrac{d\vec{r}}{ds}=\vec{\tau}\qquad \dfrac{d\vec{\tau}}{ds}=K\vec{\nu}\qquad \dfrac{d\vec{\beta}}{ds}=0\equiv T\qquad \dfrac{d\vec{\nu}}{ds}=-K\vec{\tau}$



$$\vec{r}(t)=\vec{i}\,x(t)+\vec{j}\,y(t)$$

Кривизна плоской линии $\quad \vec{\tau}=\vec{i}\cos\alpha+\vec{j}\sin\alpha$

$$K=\left|\frac{d\vec{\tau}}{ds}\right|=\left|\left(-\vec{i}\sin\alpha+\vec{j}\cos\alpha\right)\frac{d\alpha}{ds}\right|=\left|\frac{d\alpha}{ds}\right|$$

$$K=\left|\frac{d\alpha}{ds}\right|\qquad tg(\alpha)=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\qquad \alpha=arctg\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)$$

$$ds=\left|d\vec{r}\right|=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt$$

$$\left|d\alpha\right|=\frac{1}{1+\left(\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^2}\,\frac{\left|\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}\right|}{\dot{x}^2}\,dt=\frac{\left|\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}\right|}{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt$$

$$K=\frac{\left|\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}\right|}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}\qquad K=\frac{\left|y^{//}\right|}{(1+y^{/2})^{\frac{3}{2}}}$$

Приложения в механике

- Скорость точки

$$\vec r(t) = \vec i\, x(t) + \vec j\, y(t) \qquad \vec v(t) = \frac{d\,\vec r(t)}{dt} = \frac{d\,\vec r}{ds}\frac{ds}{dt} = \vec\tau\,\frac{ds}{dt} = \vec\tau\left|\vec v\right|$$

Ускорение точки

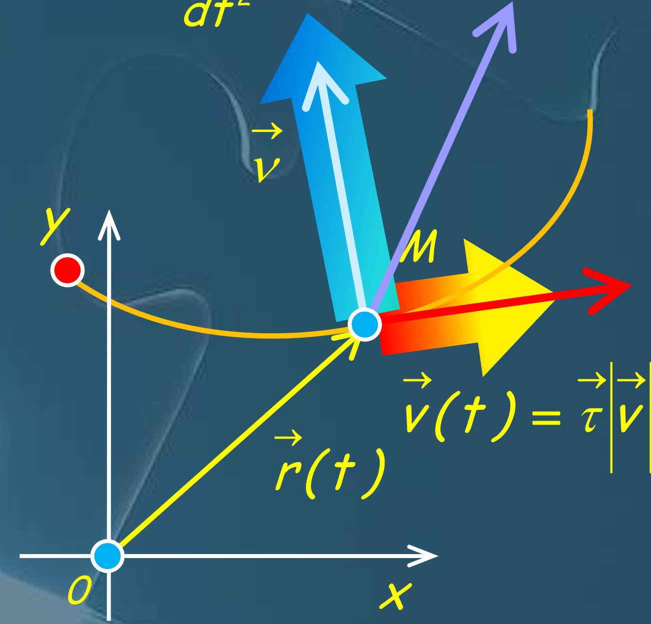
$$\frac{d^2\vec r}{dt^2} \qquad \vec w(t) = w_T\,\vec\tau + w_N\,\vec\nu$$

$$\vec w(t) = \frac{d\,\vec v(t)}{dt} = \frac{d\left(\vec\tau\,\frac{ds}{dt}\right)}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}\vec\tau + \frac{ds}{dt}\frac{d\,\vec\tau}{dt}$$

$$\frac{d\,\vec\tau}{dt} = \frac{d\,\vec\tau}{ds}\frac{ds}{dt} = K\,\vec\nu\,\frac{ds}{dt}$$

$$\vec w(t) = \frac{d^2 s}{dt^2}\vec\tau + K\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\vec\nu$$

$$\vec w(t) = w_T\,\vec\tau + w_N\,\vec\nu \qquad w_T = \frac{d^2 s}{dt^2} \qquad w_N = K\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$



Пример

Торнадо