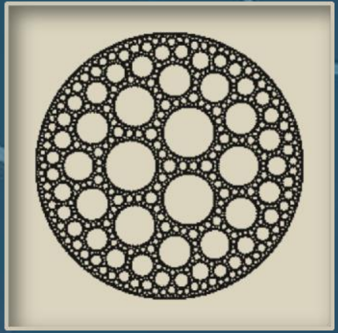
ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ



[определение локального экстремума – необходимые условия – достаточные условия – условный экстремум – вывод уравнений Лагранжа – примеры]

Необходимое условие локального экстремума

- Точка P_0 называется точкой экстремума - локального максимума (минимума) функции $f(P)$, если в окрестности $U(P_0)$ функция $f(P)$ определена и $f(P) < f(P_0) \quad (f(P) > f(P_0)) \quad \forall P \in U(P_0)$

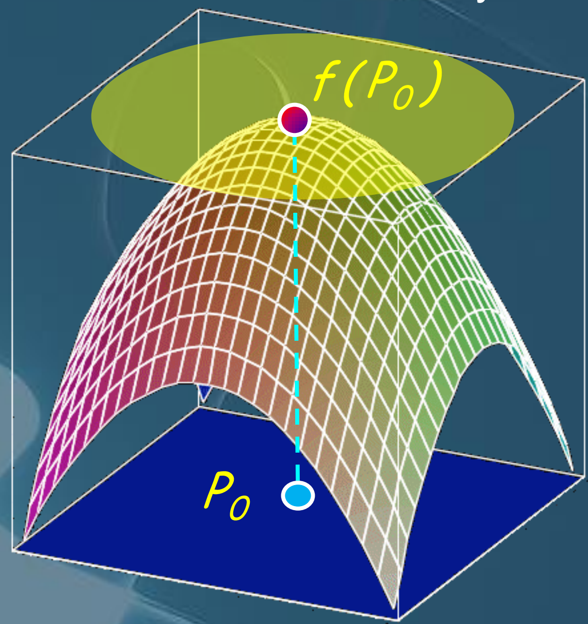
- *Необходимое условие экстремума*

Пусть P_0 точка экстремума функции $f(P)$. Тогда частные производные функции f либо не существует, либо равны нулю.

$f(x,y)$ – функция двух переменных

$P_0(x_0,y_0)$ – критическая точка

$$grad\, f(P) = 0 \quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$$



Достаточное условие локального экстремума

- *Достаточное условие экстремума*

Пусть $f'_x(x_0,y_0)=0$ и $f'_y(x_0,y_0)=0$, а вторые частные производные функции f непрерывны в некоторой окрестности точки (x_0,y_0).

Введем:

$$D=\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix}_{P(x_0,y_0)} = \left(f''_{xx}f''_{yy}-\left(f''_{xy}\right)^2\right)_{P(x_0,y_0)}$$

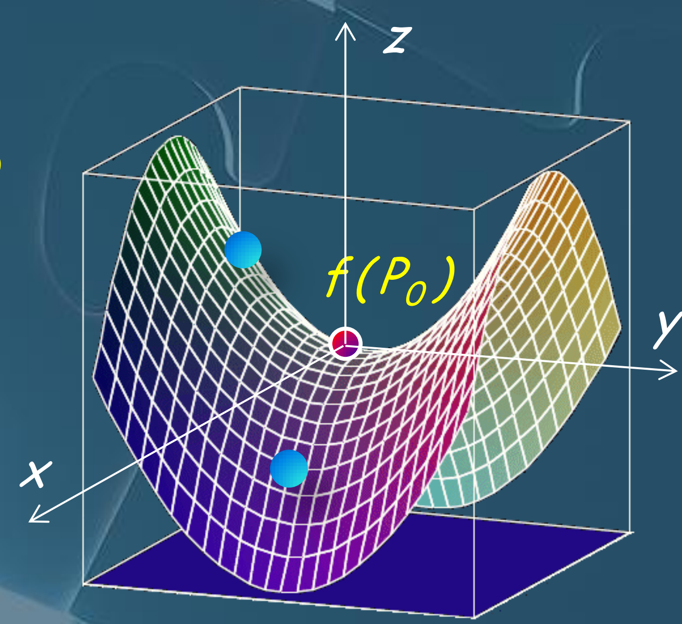
Тогда, если $D<0$, то в точке (x_0,y_0) экстремума нет.

Если $D>0$, то в точке (x_0,y_0) есть экстремум, причем если $A=f''_{xx}(x_0,y_0)>0$, то минимум, а если $A<0$, то максимум.

Если $D=0$, то экстремум может быть, а может и не быть. В этом случае требуются дополнительные исследования.

$$z=y^2-x^2 \qquad \begin{cases} z'_x=-2x=0 \\ z'_y=\ \ 2y=0 \end{cases}$$

$$D=\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=-4<0$$



Пример

@ Найти локальный экстремум для функции $\ln(x^2+y^2+1)$

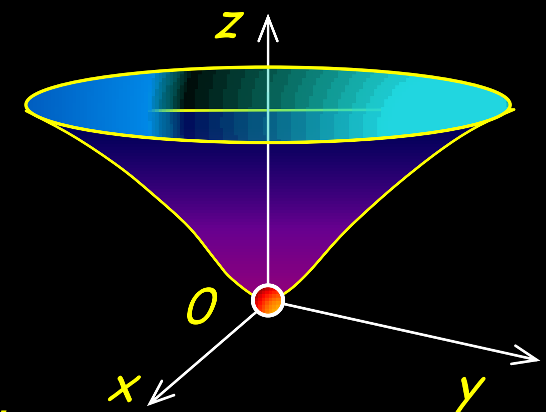
Решение

$$z=\ln(x^2+y^2+1)\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2+1},\quad\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2+1}$$

$$\Rightarrow x_0=0,\ y_0=0$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2\left(y^2-x^2+1\right)}{\left(x^2+y^2+1\right)^2}\qquad\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2\left(x^2-y^2+1\right)}{\left(x^2+y^2+1\right)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{4xy}{\left(x^2+y^2+1\right)^2}$$



$$\Rightarrow A=2,\ D=\begin{vmatrix}2&0\\0&2\end{vmatrix}=4>0\quad z(0;0)=0\ \rightarrow\ Min$$

Условный экстремум

- Задачу исследования функции $f : R^{(n)} \to R$ на условный экстремум при ограничениях $h_i(x) = 0, i = \overline{1,m}$, заданных с помощью функций h_i записывают в виде $f(x) \to Extr, \quad h_i(x) = 0, i = \overline{1,m}$
и называют *задачей на условный экстремум*.

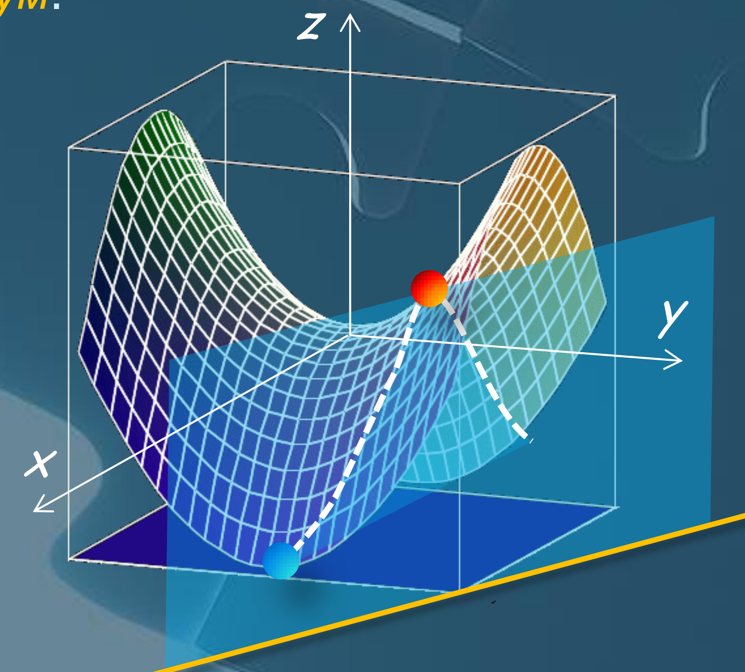
Для случая функции двух переменных:

$f(x,y) \to Extr, \qquad h(x,y) = 0$

Целевая функция. Уравнение связи.

Пример: $z = y^2 - x^2 \to Max$

$ax + by = 1$



Вывод уравнений Лагранжа

Для случая функции двух переменных $f(x,y)$ заданное условие экстремума определяет уравнение линии $h(x,y) = 0$.

Производная неявной функции $y(x)$, входящей в уравнение $h(x,y) = 0$:

$$\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \vec{T} = \left(1, \frac{dy}{dx}\right)$$

Градиент к кривой $h(x,y)$: $\mathbf{grad}(h) = \frac{\partial h}{\partial x} i + \frac{\partial h}{\partial y} j$

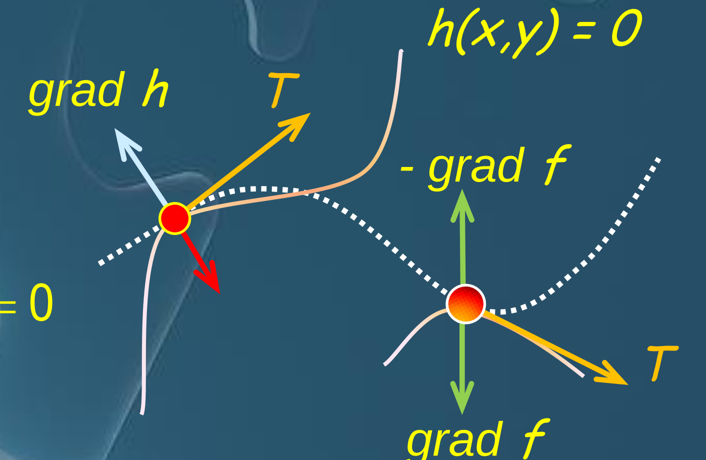
Скалярное произведение :

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{grad}(h) = \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{dy}{dx}\frac{\partial h}{\partial y} = 0$$

При движении вдоль кривой : $\mathbf{T} \cdot \mathbf{grad}(h) \neq 0$

Только в точке условного экстремума $\mathbf{T} \cdot \mathbf{grad}(h) = 0$

Следовательно векторы **grad** f и **grad** h должны быть коллинеарными : $\mathbf{grad}\, f + \lambda\, \mathbf{grad}\, h = 0$



Вывод уравнений Лагранжа

$$\text{grad } f = \nabla f \qquad \text{grad } h = \nabla h$$

- Для случая функции двух переменных функция Лагранжа имеет вид :

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda h(x,y)$$

$$\nabla F = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial h}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial h}{\partial y} \\ h \end{pmatrix}^T = \left(\nabla f + \lambda \nabla h,\ h\right)$$

Система необходимых уравнений : $\nabla F = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial h}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial h}{\partial y} = 0 \\ h(x,y) = 0 \end{cases}$

@ Найти условный экстремум: $f(x,y) = xy$, $h(x,y) = \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0$

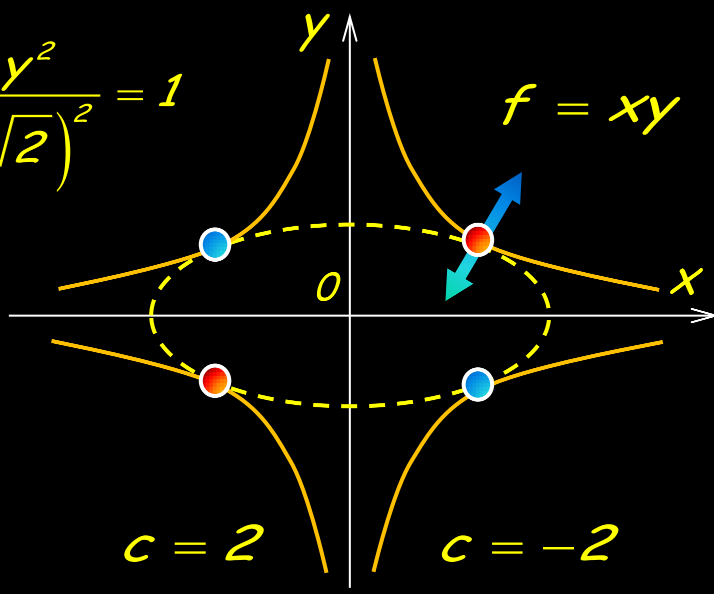
Решение

$$\nabla F = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 4y + \lambda x = 0 \\ x + \lambda y = 0 \\ x^2 + 4y^2 = 8 \end{cases}$$

$$\frac{x^2}{\left(2\sqrt{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = 1$$

$$\lambda^2 = 4 \Rightarrow \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -2$$

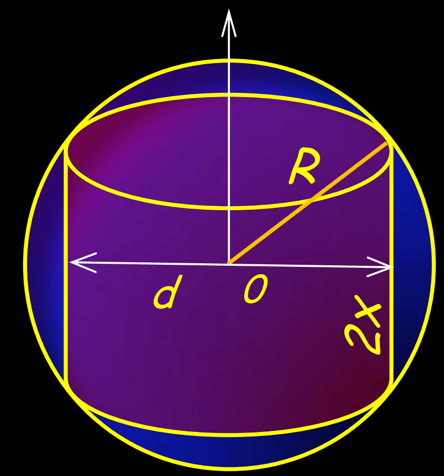
$$\Rightarrow \quad x = \pm 2y \quad \Rightarrow \quad y = \pm 1 \quad x = \pm 2$$



$Max\ f = xy,\ M_1(2,1),\ M_2(-2,-1)$

$Min\ f = xy,\ M_3(-2,1),\ M_4(2,-1)$

@ Задача Кеплера. Найти размеры цилиндра наибольшего объема, вписанного в шар. Найти отношение величины объема шара к величине объема цилиндра.



Решение

$$V_s = \frac{4}{3}\pi R^3 \qquad V_c = 2\pi(R^2 - x^2)x \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{dV_c}{dx} = 2\pi(R^2 - 3x^2) \Rightarrow R^2 - 3x^2 = 0 \Rightarrow$$

$$x_0 = \frac{R}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{2R}{\sqrt{3}} \qquad d = 2\sqrt{R^2 - \frac{R^2}{3}}$$

$$\frac{h}{d} = \frac{2R}{2\sqrt{3}R\sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \frac{d}{h} = \sqrt{2} \qquad \frac{V_s}{V_c} = \frac{4}{3}\frac{\pi R^3}{2\pi(R^2 - \frac{R^2}{3})\frac{R}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3}$$