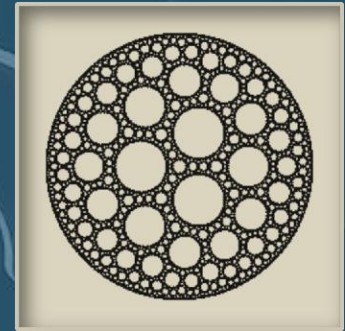


# ФУНКЦИЯ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ



[ определение – геометрическое представление для функции двух переменных – способы задания функций – классификация множеств  $R^{(n)}$  – предел функции - непрерывность – теоремы о непрерывных функциях - примеры ]

# Определение функции

- **Функция или отображение** – это кортеж множеств  $F = (f, X, Y)$ , обладающих следующими свойствами :

$$f \subseteq X \times Y \quad \forall (x, y) \in f, \forall (x', y') \in f, x = x' \rightarrow y = y'. \quad \forall x \in X \exists y \in Y : (x, y) \in f.$$

**Корте́ж** – последовательность конечного числа элементов – упорядоченная пара.

Прямое или **декартово произведение множеств** - множество, элементами которого являются все возможные упорядоченные пары элементов исходных двух множеств.

Функция одного переменного – отображение множества  $X$  на множество  $Y$ :

$$y = f(x), \quad x \in X, \quad y \in Y$$

$X$  - область определения функции  $f$ ,

$Y_f = \{y : y = f(x), x \in X\} \subset Y$  - область значений функции  $f$ .

- $y = \sqrt{1 - x^2}, \quad D : |x| \leq 1, \quad y_f \in [0; 1]$



# Функция многих переменных

- Пусть даны множества  $X_1, X_2, \dots, X_n$  и множество  $Y$ , тогда упорядоченное множество всех кортежей  $f = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, y)\}$

называется функцией  $n$  переменных тогда и только тогда, когда для любых

и  $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n, y') \in f$  из  $(x''_1, x''_2, \dots, x''_n, y'') \in f$   $y' \neq y''$

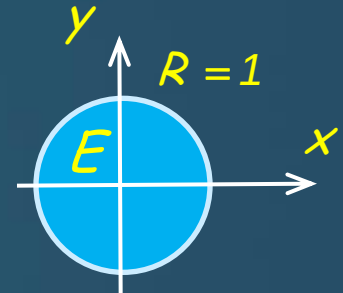
следует, что  $x'_n \neq x''_n, \forall x \in [1, n] \cap Z$

Функцией  $n$  переменных называется отображение множества  $E$  пространства  $R^{(n)}$  на множество действительных чисел.

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(P), P = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E \subset R^{(n)}.$$

$E$  – область определения функции.

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, E : x^2 + y^2 \leq 1$$



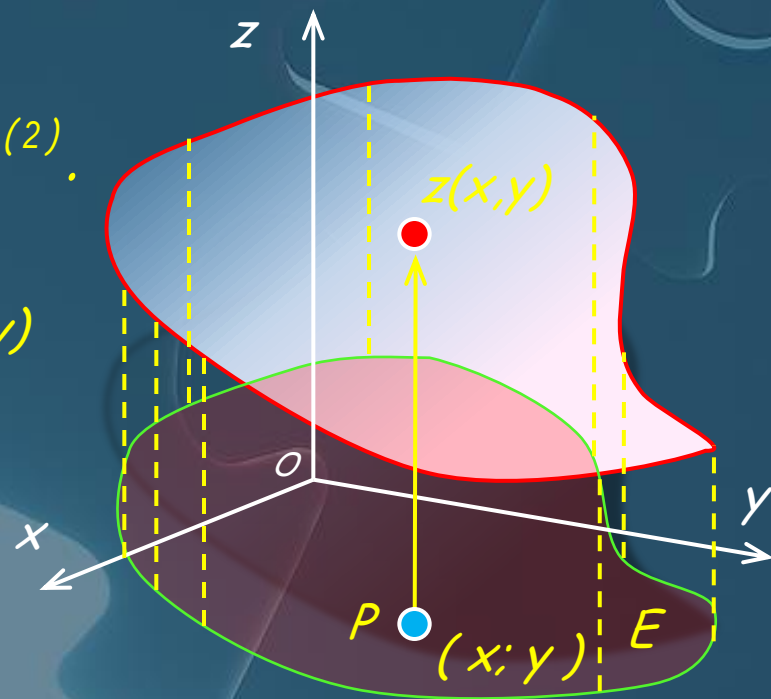
# Графическое представление для функции двух переменных

- Функция двух переменных  $Z = f(x, y)$  определяется на множестве  $E$  пространства  $R^{(2)}$

$$z = f(x, y) = f(P), P = (x, y) \in E \subset R^{(2)}.$$

Графиком функция двух переменных  $z = f(x, y)$  называется совокупность всех точек  $(x, y, z)$ , получающихся для всех точек  $(x, y)$  на множества  $E$ .

- $z = \sqrt{1 - x - y}, E : x + y \leq 1$

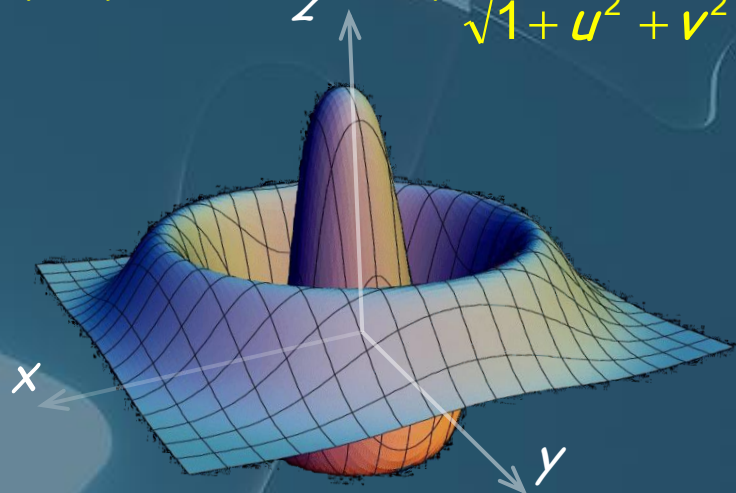
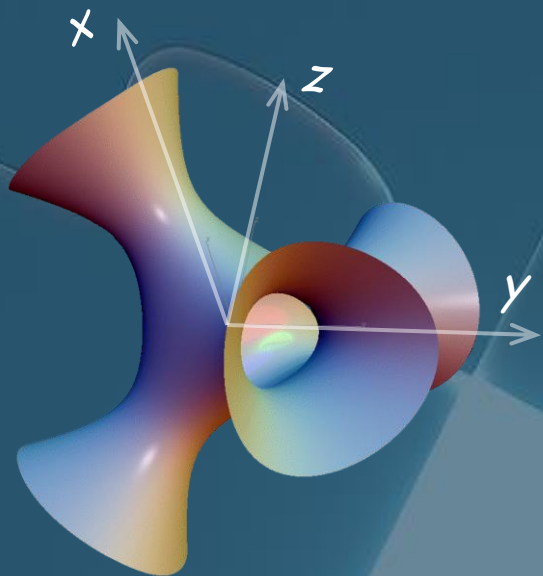


# Способы задания функции

- Явный способ задания функции  $z = \sqrt{1-x-y}, E: x+y \leq 1$

- Параметрический способ задания функции

$$x(u,v), y(u,v), z(u,v) = e^{-\frac{u^2+v^2}{2}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}}\right)$$



- неявный способ задания функции  $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 16xyz = 4$





# Сечения и линии уровня

- Построение линий уровня  $z = f(x, y) \Rightarrow f(x, y) = \text{const}$   $f(x, y) = a$   
 $f(x, y) = b$   
 $f(x, y) = c$

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$0 = x^2 + y^2$$

$$1^2 = x^2 + y^2$$

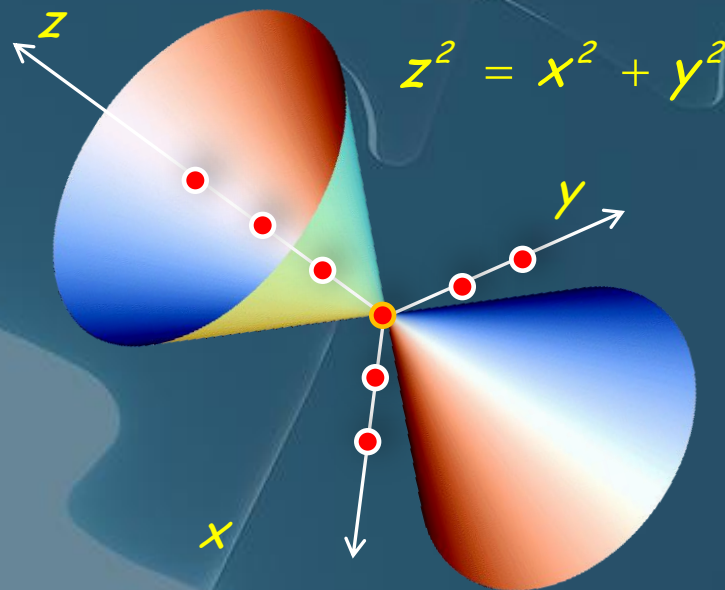
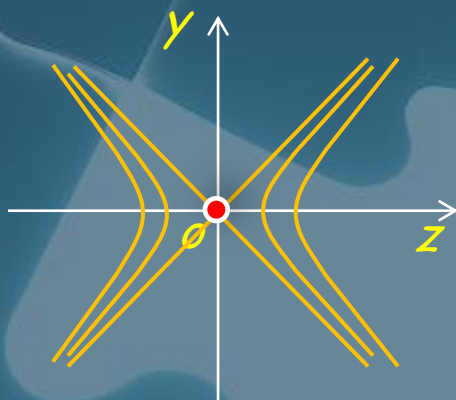
$$2^2 = x^2 + y^2$$

$$3^2 = x^2 + y^2$$

$$z^2 - y^2 = 0^2$$

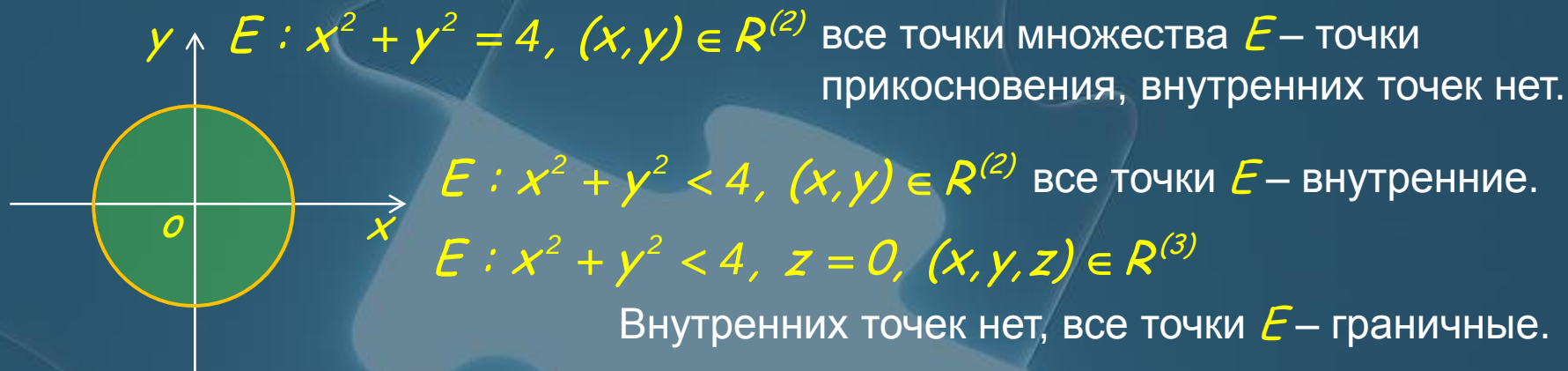
$$z^2 - y^2 = 1^2$$

$$z^2 - y^2 = 2^2$$



# Классификация множеств пространства $R^{(n)}$

- Точка  $P_0$  называется точкой прикосновения множества  $E \subset R^{(n)}$ , если всякая окрестность точки  $P_0$  содержит хотя бы одну точку множества  $E$ .
- Множество  $E \subset R^{(n)}$  называется замкнутым, если оно содержит все свои точки соприкосновения.
- Точка  $P_0$  называется внутренней точкой множества  $E \subset R^{(n)}$ , если существует окрестность точки  $P_0$ , все точки которой принадлежат множеству  $E$ .



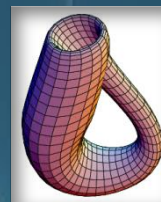
# Классификация множеств пространства $R^{(n)}$

- Множество  $E \subset R^{(n)}$  называется открытым, если оно состоит только из внутренних точек.
- Множество  $E \subset R^{(n)}$  называется связным, если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой, все точки которой принадлежат  $E$ .
- Областью называется связное и открытое множество.
- Если множество точек, дополнительных к области, связно, то область называется односвязной. Если дополнительное множество несвязно, то область называется многосвязной.

Многосвязная область



Односвязная область



Односторонние поверхности



Точка называется граничной для множества  $E$ , если в любой ее окрестности есть точки принадлежащие как множеству  $E$ , и не принадлежащие ему.

- Область с присоединенной к ней границей называется замкнутой областью.





# Предел функции

- Число  $A$  называется пределом функции  $f(P)$  в точке  $P_0$  по множеству  $E$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$ , такое, что из неравенства  $\rho(P, P_0) < \delta$ ,  $P \in E$  следует неравенство  $|f(P) - A| < \varepsilon$ .

$$\lim_{P \rightarrow P_0, P \in E} f(P) = A$$

- Предел суммы, произведения, частного двух или нескольких функций равен сумме, произведению, частному пределов этих функций. В последнем случае предел знаменателя не должен быть равным нулю.
- Если точка  $P_0 \in E$  и предел функции  $f(P)$  в точке  $P_0$  по множеству  $E$  существует, то функция  $f(P)$  называется непрерывной в точке  $P_0$  по множеству  $E$ ,  $\lim f(P) = f(P)$ .
- Функция  $f(P)$  непрерывная в каждой точке множества  $E$ , непрерывна на множестве  $E$ .



@ Найти предел функции  $f(P)$ ,  $f(P) = f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$  когда  $P$  стремится к нулю.

Решение

Выберем путь - луч  $y = kx$ ,  $k \neq 0, k \neq \infty$

$$f(x, kx) = \frac{x^3 k}{x^4 + k^2 x^2} = \frac{xk}{x^2 + k^2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xk}{x^2 + k^2} = 0$$

Ищем теперь частичный предел по пути вдоль кривой  $y = x^2$

$$f(x, x^2) = \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2}$$

Предела функции во всей области существования нет.

@ Найти предел функции  $f(P)$ ,  
когда  $P$  стремится к началу координат

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$$

Решение

$$|x^2 y| = |x| |xy| \leq |x| (x^2 + y^2)$$

$$\Rightarrow \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| \leq |x| \Rightarrow \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

Предел функции равен нулю.



# Теоремы о непрерывных функциях

- Теорема Вейерштрасса

Если функция непрерывна на замкнутом и ограниченном множестве  $E \subset \mathbb{R}^{(n)}$  то она принимает на этом множестве как самое большое, так и самое малое значение.

- Теорема Кантора

Функция, непрерывная на замкнутом и ограниченном множестве  $E$ , равномерно непрерывна на нем.

- Теорема Больцано – Коши

Функция, непрерывная на связном множестве, принимает вместе с двумя значениями и все промежуточные.

- В сложной функции число основных и промежуточных аргументов может быть различно. Непрерывность сложной функции определяется непрерывностью промежуточных аргументов.

$$f(u, v), u = u(x), v = v(x) \Rightarrow f(x) \quad f(u), u = u(x, y, z)$$

