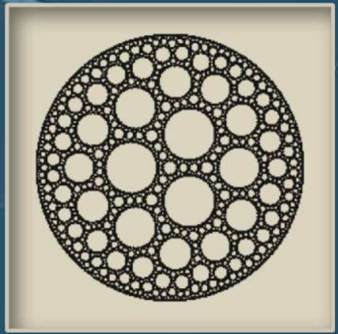
ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ



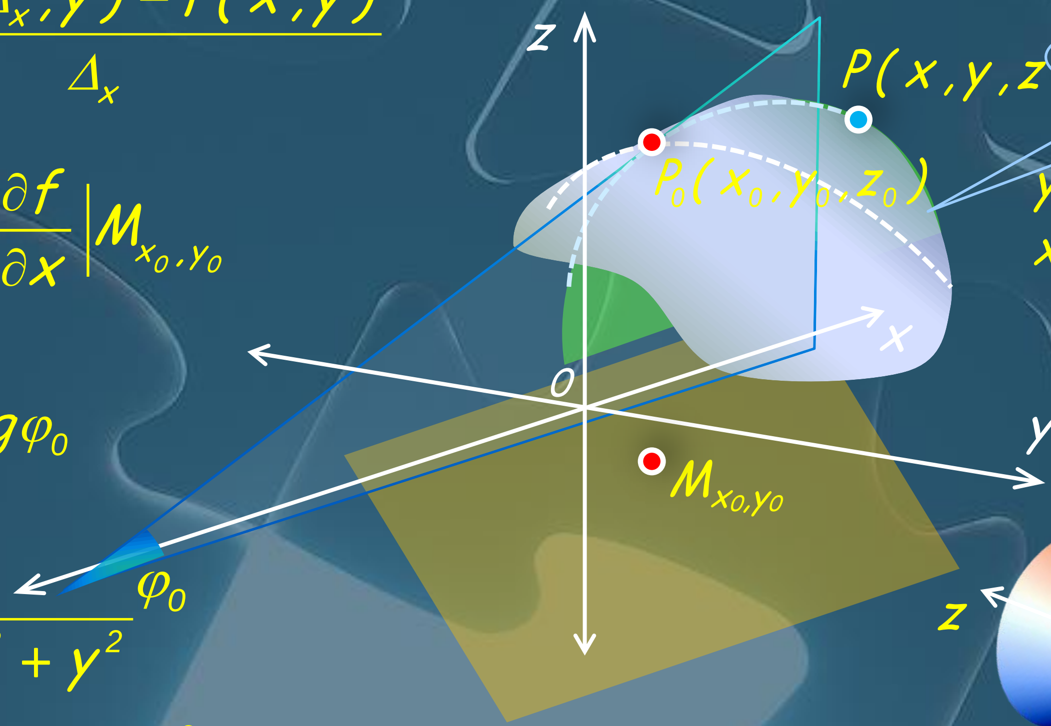
[частные приращения функции - частные производные функции двух переменных - дифференцирование в заданном направлении - градиент функции - уравнения касательной плоскости и нормали - дифференциал функции - производные и дифференциалы сложных функций - дифференцирование неявной функции - производные высших порядков – примеры]

Частные производные функции двух переменных

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ y=y_0}} \frac{f(x+\Delta_x, y) - f(x,y)}{\Delta_x}$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ y=y_0}} \frac{\Delta f_x}{\Delta_x} = \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{M_{x_0,y_0}}$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ y=y_0}} \frac{\Delta f_x}{\Delta_x} = tg\varphi_0$$



$$z = f(x,y)$$

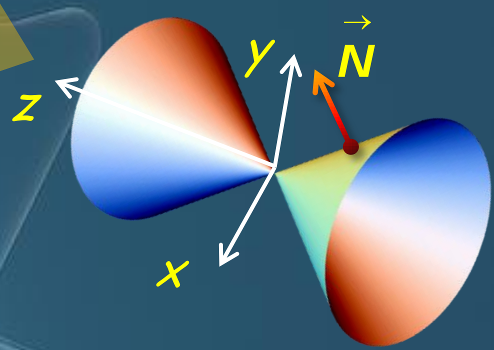
$$y = y_0, \quad z = f(x, y_0)$$

$$x = x_0, \quad z = f(x_0, y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \ \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$z = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\pm\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}$$



Пример

@ Найти частные производные функции $g(x,y,z) = e^{-\frac{x^2+y^2}{z}}$

Решение

$$\frac{\partial g}{\partial x} = e^{-\frac{x^2+y^2}{z}} \left(-\frac{x^2+y^2}{z}\right)'_x = -\frac{2x}{z} e^{-\frac{x^2+y^2}{z}}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = e^{-\frac{x^2+y^2}{z}} \left(-\frac{x^2+y^2}{z}\right)'_y = -\frac{2y}{z} e^{-\frac{x^2+y^2}{z}}$$

$$\frac{\partial g}{\partial z} = e^{-\frac{x^2+y^2}{z}} \left(-\frac{x^2+y^2}{z}\right)'_z = \frac{x^2+y^2}{z^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{z}}$$

Дифференцирование в заданном направлении

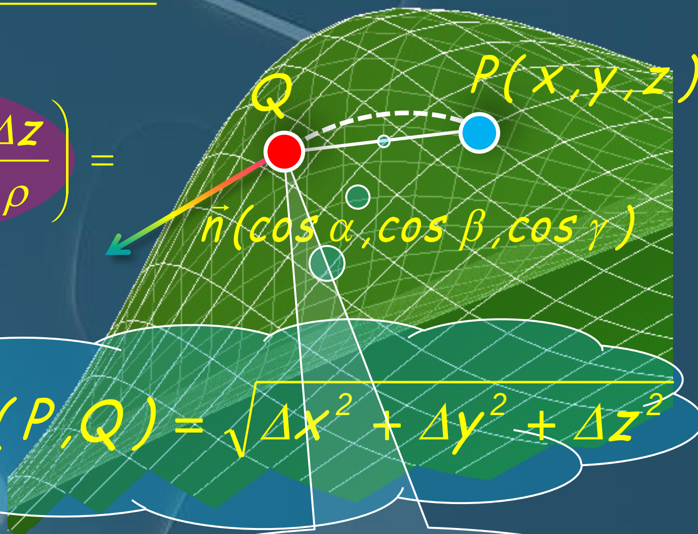
$$D_{\vec n}\,g(x,y,z)=\lim_{\rho\to 0}\frac{g(Q)-g(P)}{\rho}\qquad g=f(x,y,z)$$

$$D_{\vec n}\,g(x,y,z)=\lim_{\rho\to 0}\frac{g(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z)-g(x,y,z)}{\rho}$$

$$\lim_{P\to Q}\left(\frac{\Delta g_x}{\Delta x}\frac{\Delta x}{\rho}+\frac{\Delta g_y}{\Delta y}\frac{\Delta y}{\rho}+\frac{\Delta g_z}{\Delta z}\frac{\Delta z}{\rho}+\hat\alpha\frac{\Delta x}{\rho}+\hat\beta\frac{\Delta y}{\rho}+\hat\gamma\frac{\Delta z}{\rho}\right)=$$

$$\lim_{P\to Q}\left(\frac{\Delta g_x}{\Delta x}\frac{\Delta x}{\rho}+\frac{\Delta g_y}{\Delta y}\frac{\Delta y}{\rho}+\frac{\Delta g_z}{\Delta z}\frac{\Delta z}{\rho}\right)=$$

$$=D_{\vec n}\,g(x,y,z)$$



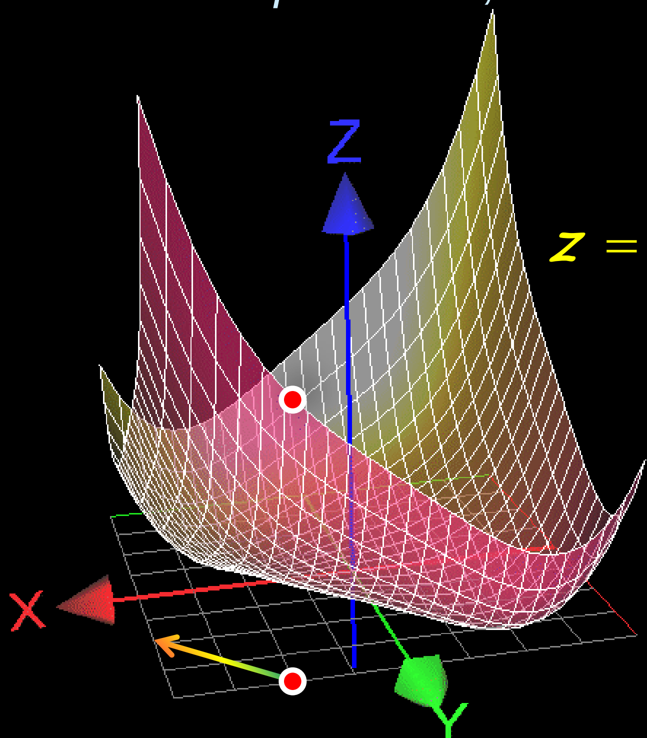
$$\rho=\rho(P,Q)=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}$$

$$Q(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z)$$

$$D_{\vec n}\,g(x,y,z)=\frac{\partial g}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial g}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial g}{\partial z}\cos\gamma$$

Пример

@ Найти производную функции $z = x^4 + y^4 + xy$ в точке $A(1,2)$ в направлении, заданном вектором $\vec{r} = \vec{i} - \vec{j}$



$$z = x^4 + y^4 + xy$$

Решение

$$D_{\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}}(x^4 + y^4 + xy)\Big|_{(1,2)} =$$

$$= D_{\frac{\vec{i}-\vec{j}}{\sqrt{2}}}(x^4 + y^4 + xy)\Big|_{(1,2)} =$$

$$D_{\frac{\vec{i}-\vec{j}}{\sqrt{2}}}(x^4 + y^4 + xy)\Big|_{(1,2)} =$$

$$= \left((4x^3 + y)\frac{\sqrt{2}}{2} + (4y^3 + x)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)\Bigg|_{(1,2)} =$$

$$= -19.089$$

Градиент функции трех переменных

- $D_{\vec{n}} f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot\left(\cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k}\right)$

  - $\mathbf{grad}\ f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$

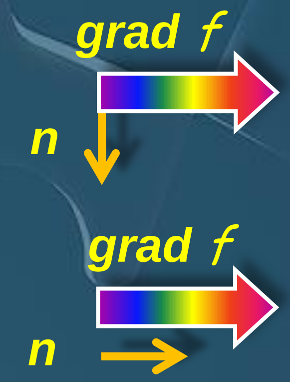
  - $D_{\vec{n}} f(x,y,z) = \mathbf{grad}\ f(x,y,z)\cdot \mathbf{n}$

  - $\angle\left(\mathbf{grad}\ f,\ \mathbf{n}\right) = \frac{\pi}{2} \to$

    $\left|\mathbf{grad}\ f\right|\left|\mathbf{n}\right| = 0 \to \mathbf{grad} f\cdot\mathbf{n} = 0$

  - $\mathbf{grad}\ f\cdot\mathbf{n} \Rightarrow \mathbf{grad}\left(f(x,y,z)\right)\cdot\mathbf{n} \to$

    - $\left|\max D_{\vec{n}} f(x,y,z)\right| = \left|\mathbf{grad}\ f(x,y,z)\right|$



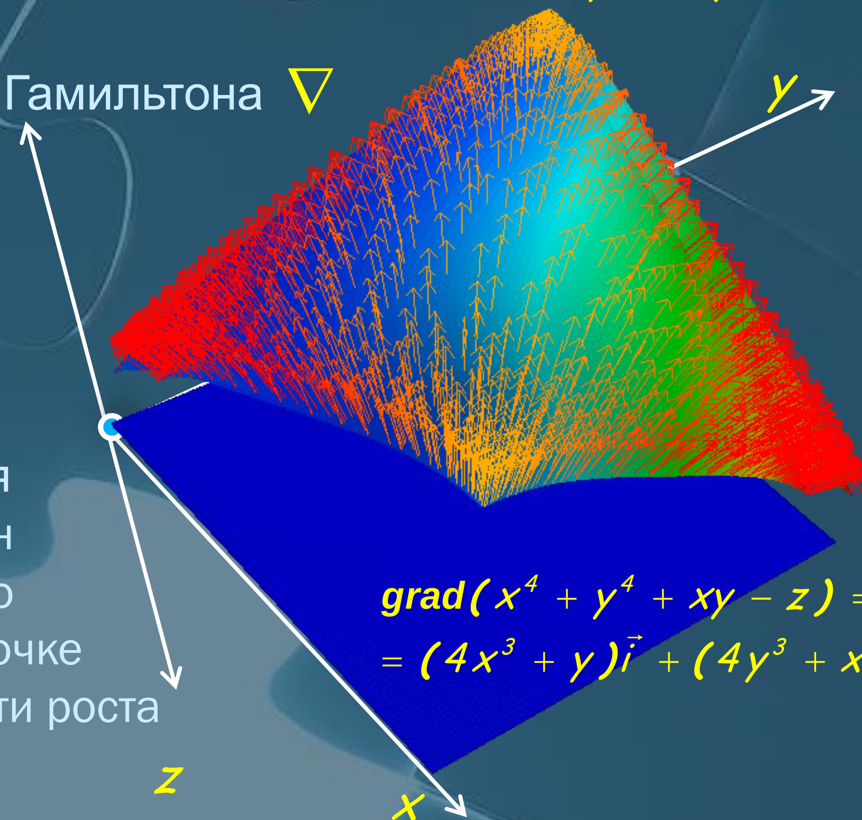
Градиент функции

- $$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k} \qquad \mathbf{grad}\ f \Leftrightarrow \nabla f \qquad f = x^4 + y^4 + xy - z$$

Дифференциальный оператор Гамильтона ∇

$$\left|\mathbf{grad}\ f(x,y,z)\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}$$

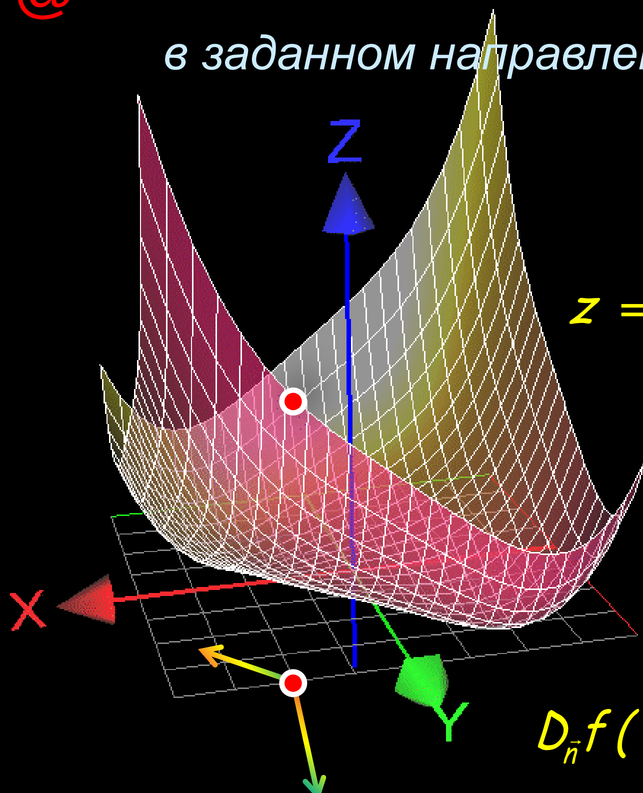
Вектор ***grad f(x,y,z)*** называется градиентом функции *f(x,y,z)*, он направлен в сторону наибольшего возрастания функции *f(x,y,z)* в точке *(x,y,z)*, а его длина равна скорости роста функции в этом направлении.



$$\mathbf{grad}(x^4 + y^4 + xy - z) = (4x^3 + y)\vec{i} + (4y^3 + x)\vec{j} - \vec{k}$$

Пример

@ Найти градиент функции $z = x^4 + y^4 + xy$ и её производную в заданном направлении $\mathbf{n} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$ в точке $A(1,2)$



$z = x^4 + y^4 + xy$

$$\mathbf{grad}(x^4 + y^4 + xy)\Big|_{(1,2)} =$$

$$= (4x^3 + y)\vec{i} + (4y^3 + x)\vec{j}\Big|_{(1,2)}$$

$$\mathbf{grad}(x^4 + y^4 + xy)\Big|_{(1,2)} = 6\vec{i} + 33\vec{j}$$

$$\Big|\mathbf{grad}(x^4 + y^4 + xy)\Big|\Big|_{(1,2)} = \sqrt{6^2 + 33^2} \approx 33.54$$

$$D_{\vec{n}} f(x, y,) = \mathbf{grad}\ f(x, y) \cdot \mathbf{n}$$

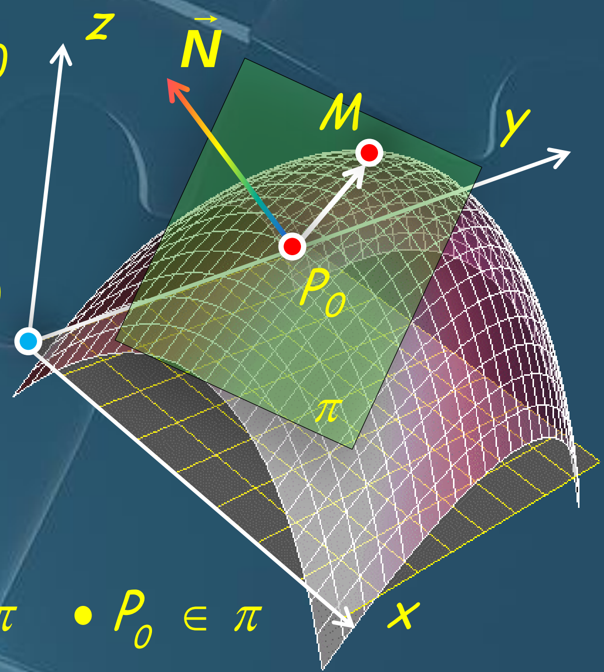
$$D_{\vec{n}} f(x, y,) = (6\vec{i} + 33\vec{j}) \cdot (0.707\vec{i} - 0.707\vec{j}) = -19.089$$

Уравнения касательной плоскости и нормали

$$z = f(x,y) \qquad f(x,y) - z = 0 \qquad F(f(x,y) - z) = 0$$

$$\vec{N} \Leftrightarrow \mathbf{grad}\, F(P_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\vec{j} - \vec{k} \qquad \vec{N} \cdot \overrightarrow{P_0 M} = 0$$

$$f'_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$



- Уравнение наклонной касательной плоскости

$$z - z_0 = f'_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y - y_0)$$

- Уравнение нормали

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0,y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0,y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$

$\bullet\, M \in \pi \quad \bullet\, P_0 \in \pi$

Дифференциал функции

$$\Delta f(x,y) = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$$

$$\Delta y = 0 \;\to\; \Delta_x f(x,y) = (A+\alpha)\Delta x \;\Rightarrow\; \frac{\Delta_x f(x,y)}{\Delta x} = A + \alpha$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f(x,y)}{\Delta x} = A = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = f'_x(x,y) \qquad B = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = f'_y(x,y)$$

$$\Delta f(x,y) = f'_x(x,y)\Delta x + f'_y(x,y)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$$

$$df = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy$$

$$dg = g'_x(x,y,z)dx + g'_y(x,y,z)dy + g'_z(x,y,z)dz$$

- $dg = \mathbf{grad}\, g \bullet \mathbf{ds} \qquad \Delta g \approx dg$

$$\Delta g(x,y,z) \approx g'_x(x,y,z)\Delta x + g'_y(x,y,z)\Delta y + g'_z(x,y,z)\Delta z$$

Производные и дифференциалы сложных функций

- $z = f(u, v) \qquad u = u(x),\ v = v(x)$

$$dz = \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dx}dx + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dx}dx$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dx}$$

- $y = f(x, v) \qquad v = v(x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dx}$$

Пример

$$y = x + e^{x^3}$$

$$y = x + v,\ v = e^{x^3}$$

$$y' = 1 + e^{x^3}3x^2$$

Производные и дифференциалы сложных функций

- $z = f(u,v,w)\quad u = u(x,y),\ v = v(x,y),\ w = w(x,y)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}$$

- $T = f(u,v)\quad u = u(x,y,z),\ v = v(x,y,z)$

$$dT = T'_x dx + T'_y dy + T'_z dz = T'_u(u'_x dx + u'_y dy + u'_z dz) +$$
$$+T'_v(v'_x dx + v'_y dy + v'_z dz) = T'_u du + T'_v dv$$

Дифференцирование неявной функции

- $F(x,y(x))=0$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

Пример

$$tg(xy)=1$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{(tg(xy)-1)'_x}{(tg(xy)-1)'_y}\Rightarrow$$

$$-\frac{y\cos^2(xy)}{x\cos^2(xy)}=-\frac{y}{x}=-\frac{\pi}{4x^2}$$

- $F(x,y,z(x,y))=0$

$$\frac{\partial F(x,y,z(x,y))}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial x}\cdot 1+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot 0+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0\Rightarrow$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

Пример

$$x^2+y^2+z^2=1$$

$$z'_x=-\frac{x}{z}\qquad z'_y=-\frac{y}{z}$$

Производные высших порядков

- $z = f(x,y)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(f'_x\right)'_y = \left(f'_y\right)'_x = f''_{xy}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = f'''_{xxx}$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = f'''_{xxy}$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = f'''_{xyy}$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = f'''_{yyy}$$