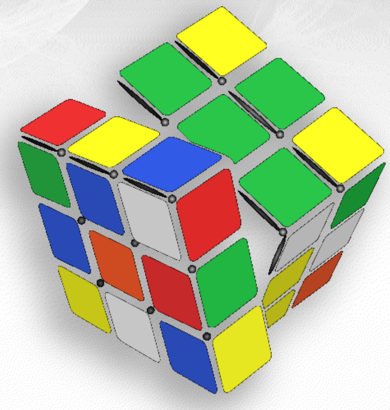
Логика высказываний и её приложения



{ основные понятия - составление сложных выражений - таблицы истинности - законы логики высказываний - примеры }

- Исходным понятием логики высказываний является *простое* или *элементарное высказывание*. Это понятие не определяется через другие понятия, так как является базовым. Ему отвечает всякое повествовательное предложение, утверждающее что-либо о чем-либо.

  Если смысл содержащегося в высказывании утверждения соответствует действительности, то высказывание называют *истинным*, в противном случае высказывание называют *ложным*.

  Обычно элементарные высказывания обозначают строчными буквами латинского алфавита *a, b, c, x, y …*, которые также являются *логическими переменными*. Истинному высказыванию отвечает значение Истина, обозначаемое *T* или *1*, а ложному – Ложь, обозначаемое *F* или *0* .

Примеры высказываний:

«Всякий квадрат есть параллелограмм»	Истина	1	*T*
«Каждый параллелограмм есть квадрат»	Ложь	0	*F*

Составление сложных высказываний

- Из элементарных высказываний можно составлять сложные высказывания с помощью скобок ( ) и логических связок $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\equiv$, называемых соответственно :
  - *отрицание* $\neg$ $\overline{A}$ (*инверсия*) ;
  - *логическое "и"* (*конъюнкция*) $\wedge$;
  - *логическое "или"* (*дизъюнкция*) $\vee$;
  - *логическое следствие* (*импликация*) $\rightarrow$;
  - *эквивалентность* $\equiv$.

Семантику логических связок можно представить с помощью *таблицы истинности*. В левой части этой таблицы перечисляются все возможные комбинации значений логических переменных. В правой части – соответствующие им значения новых выражений, полученных из переменных и связок.

x	y	$\neg x$	$x \wedge y$	$x \vee y$	$x \rightarrow y$	$x \equiv y$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

- Связки имеют следующий приоритет: $\neg \; \wedge \; \vee \; \rightarrow \; \equiv$.
Приоритет операций, представленных логическими связками, можно изменить с помощью скобок.
Высказывания, построенные с помощью простых высказываний, связок и скобок, называют *правильно построенными формулами* или сокращённо *формулами*.

@ *Даны четыре простых высказывания : A – “Человек приходит в книжный магазин”, B – “Есть нужная книга”, C - “Человек покупает книгу”, D – “Человек уходит из магазина”.*

Какой логической формулой запишется выражение :
“**Если человек приходит в книжный магазин, то, если есть нужная книга, человек покупает книгу или если нужной книги нет, то человек уходит из магазина**”.

Решение

Импликация $\rightarrow$ соответствует логической связке “если, то”, дизъюнкция $\vee$ – связке “или”, отрицание $\neg$ – связке “не”.

“Если *A*, то (если *B*, то *C*) или (если не *B* , то *D*)” .

$$A \rightarrow (B \rightarrow C) \vee (\neg B \rightarrow D)$$

- Для любой формулы также можно построить таблицу истинности. Пример:

x	y	$\neg x$	$\neg x \vee y$	$\neg x \wedge (\neg x \vee y)$	$\neg x \wedge (\neg x \vee y) \to \neg x$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
1	1	0	1	0	1

Если формула содержит n переменных, то в таблице истинности будет содержаться 2^n строк. В приведенном примере формула содержит 2 переменные и $2^2 = 4$ строки. Данная формула истинна на любом наборе значений своих переменных. Такие формулы называются *тождественно истинными* или *тавтологиями*. Если же формула ложна на любом наборе значений своих переменных, то она называется *тождественно ложной* или *противоречием*. Если две разные формулы принимают одинаковые значения на любом наборе значений переменных, то такие формулы называют *равносильными*. Равносильность обозначается знаком равенства $=$.

- Известно много тождественно истинных формул, которые называют *законами логики высказываний*.

Доказательство этих и последующих законов осуществляется с помощью построения таблиц истинности или простейших логических рассуждений.

Основными законами являются следующие:

- законы идемпотентности (*равносильности*):
  - $x \wedge x = x$
  - $x \vee x = x$
- $x \wedge 1 = x$
- $x \vee 1 = 1$
- $x \wedge 0 = 0$
- $x \vee 0 = x$
- $x \wedge \neg x = 0$ – закон противоречия
- $x \vee \neg x = 1$ – закон исключения третьего
- $\neg \neg x = x$ – закон снятия двойного отрицания
- законы поглощения
  - $x \wedge (y \vee x) = x$
  - $x \vee (y \wedge x) = x$

Следующая группа законов представляет взаимосвязь между логическими операциями:

- $(x \equiv y) = (x \to y) \wedge (y \to x)$
- $x \to y = \neg x \vee y$
- законы Де Моргана
  - $\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$
  - $\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$

Следствием приведенных выше законов является следующий факт:
Любую логическую формулу можно заменить равносильной ей, но содержащей только две логические операции: конъюнкцию и отрицание или дизъюнкцию и отрицание.

Важным законом алгебры логики является закон двойственности.
Пусть формула A содержит только операции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания. Для конъюнкции двойственной операцией считается дизъюнкция, а для дизъюнкции – конъюнкция. Тогда по определению формулы A и A^* называются двойственными, если формула A^* получается из A путем замены в ней каждой операции на двойственную.

- *Закон двойственности*: формула A является тавтологией тогда и только тогда, когда формула A^* является противоречием.

Пример

@ Представить логическую операцию “эквивалентность” $x \equiv y$ формулой, содержащей только дизъюнкцию, конъюнкцию и отрицание

Решение

Формуле $x \equiv y$ соответствует таблица истинности:

x	y	$x \equiv ó$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

На основании этой таблицы истинности определяется совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ) операции:

$$x \equiv y = \left(x \wedge y\right) \vee \neg\left(x \vee y\right)$$

или, в других обозначениях,

$$x \sim y = x \cdot y + \overline{x} \cdot \overline{ó}$$

Пример

@ Задана таблица истинности формулы $f(x,y)$, требуется найти равносильную совершенную конъюнктивную нормальную форму (СКНФ)

x	y	f
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0

Решение

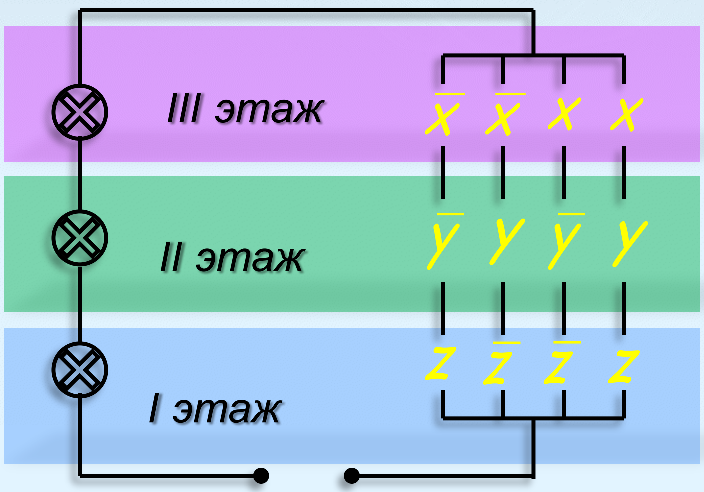
$$f:\ \underset{f=0}{\wedge} = \left(x^{\alpha_1} \vee y^{\alpha_2}\right),\ \alpha_i = \begin{cases} 0, & x^{\alpha_i} = x \\ 1, & x^{\alpha_i} = \bar{x} \end{cases},\ i = 1,2$$

В таблице истинности значению $f = 0$ соответствует набор переменных: $\{(0\ 0),(1\ 0),(1\ 1)\}$. Поэтому СКНФ функции f имеет вид:

$$f(x,y) = \left(x \vee y\right)\cdot\left(\bar{x} \vee y\right)\cdot\left(\bar{x} \vee \bar{y}\right)$$

@ Построить схему электрической цепи включения света для подъезда трехэтажного дома, такую, чтобы выключателем на любом этаже можно было бы включить или выключить свет во всем доме.

Решение



III	II	I	Свет
x	y	z	f(x,y,z)
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

$$f = \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee xyz \qquad f(x,y,z) = \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}y\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + xyz$$