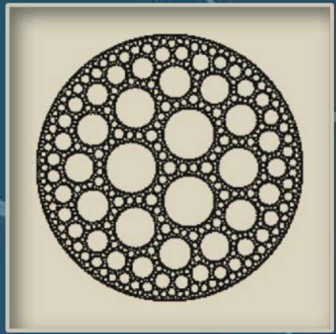
ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА



{ задача Коши - геометрическая интерпретация дифференциального уравнения первого порядка - уравнения с разделенными и разделяющимися переменными - однородные дифференциальные уравнения - линейные дифференциальные уравнения - метод Бернулли - метод Лагранжа - уравнение Бернулли - уравнения, не разрешенные относительно производной – пример }

Задача Коши

- Задача отыскания решения дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

удовлетворяющего заданным начальным условиям $y(x_0) = y_0$, называется задачей Коши.

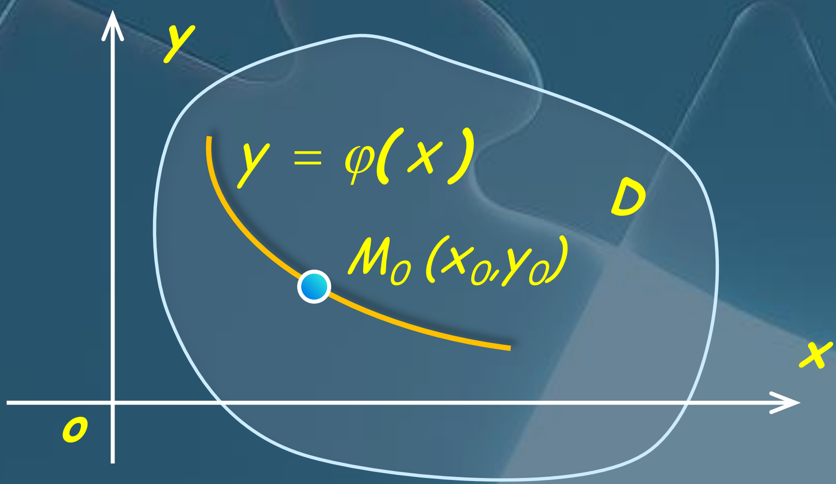
Огюстен Луи Коши
(Augustin Louis Cauchy)
1789 – 1857

Теорема

Если функция f - правая часть дифференциального уравнения $dy/dx = f(x,y)$ непрерывна в некоторой замкнутой области D плоскости xoy и имеет в этой области ограниченную частную производную $\partial f(x,y)/\partial y$, то каждой внутренней точке области D соответствует, и притом единственное, решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

Геометрически это означает, что через каждую точку $M_0\ (x_0, y_0)$ области D проходит одна и только одна интегральная кривая рассматриваемого уравнения.

Данная теорема называется *теоремой существования и единственности решения дифференциального уравнения*



$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad y(x_0) = y_0$$

$$y = \varphi(x) \qquad y(x_0) = \varphi(x_0)$$

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} \equiv f(x, \varphi(x))$$

Пример

@ *Решить дифференциальное уравнение первого порядка, при заданных начальных условиях*

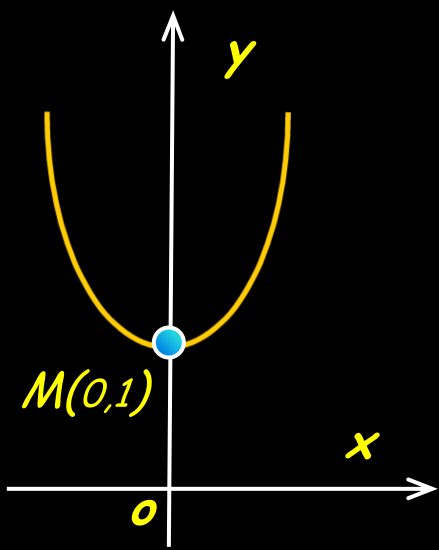
$$\frac{dy}{dx} = xy \quad y(0) = 1$$

Решение

$$\frac{dy}{dx} = xy \Rightarrow \frac{dy}{y} = xdx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int xdx \Rightarrow$$

$$\ln|y| = \frac{x^2}{2} + \ln C \Rightarrow y = Ce^{\frac{x^2}{2}}$$

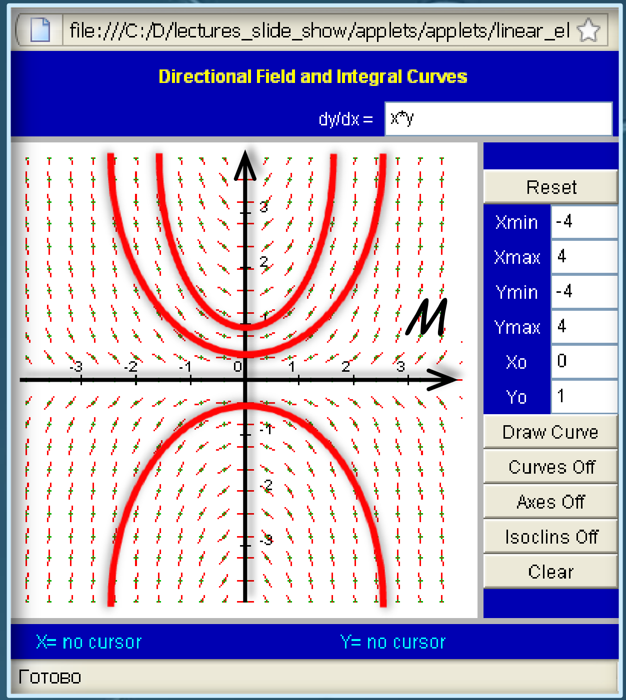
$$y(0) = 1 \Leftrightarrow Ce^0 = 1 \qquad y = e^{\frac{x^2}{2}}$$



Геометрическая интерпретация ДУ первого порядка

- Пусть дано дифференциальное уравнение, разрешенное относительно производной *$dy/dx = f(x,y)$*. Это уравнение для каждой точки *$M(x,y)$* определяет значение производной *dy/dx*, т.е. определяет угловой коэффициент касательной к интегральной кривой, проходящей через эту точку. Таким образом, рассматриваемое дифференциальное уравнение дает совокупность направлений или, как говорят, определяет *поле направлений (поле линейных элементов)*.

  Задача интегрирования такого уравнения, с геометрической точки зрения, заключается в нахождении кривых, *направление касательных к которым совпадает с направлением поля линейных элементов в соответствующих точках.*



$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \Rightarrow tg\varphi_o = f(x_o, y_o)$$

ДУ с разделенными и разделяющимися переменными

- Уравнением *с разделенными переменными* называется уравнение вида:

$$M(x)dx + N(y)dy = 0$$

Решение: прямое интегрирование - $\int M(x)dx + \int N(y)dy = C$

- Уравнением *с разделяющимися переменными* называется уравнение вида:

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$$

Решение: приведение к виду уравнения с разделенными переменными путем деления обеих его частей на произведение $N_1(y)\,M_2(x)$

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C$$

Пример

@ *Решить дифференциальное уравнение* $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1-y^2}{2xy}$

Решение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-y^2}{2xy} \Rightarrow \frac{2ydy}{1-y^2} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{2ydy}{1-y^2} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$-\int \frac{d(1-y^2)}{1-y^2} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow -\ln|1-y^2| = \ln|x| + \ln C \Rightarrow$$

$$\frac{1}{1-y^2} = Cx \quad \Rightarrow \qquad x(1-y^2) = C$$

Однородные дифференциальные уравнения

- Уравнение $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ называется *однородным* дифференциальным уравнением первого порядка, если функции $M(x,y)$ и $N(x,y)$ являются однородными функциями одного и того же измерения:

$$M(tx,ty) = t^n M(x,y),\ N(tx,ty) = t^n N(x,y)$$

- Если уравнение может приведено к виду: $dy/dx = F(x,y) = F(v)$, где $v = y/x$, то оно называется *однородным* дифференциальным уравнением первого порядка.

Решение: для приведения к уравнению *с разделяющимися переменными* используется подстановка

$$v = \frac{y}{x} \Rightarrow y = xv \qquad \frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v \Rightarrow x\frac{dv}{dx} + v = F(v)$$

$$\frac{dv}{F(v) - v} = \frac{dx}{x} \qquad \int \frac{dv}{F(v) - v} = \int \frac{dx}{x}$$

- $$\int \frac{dv}{F(v) - v} = \ln|x| + C$$

Пример

@ Решить дифференциальное уравнение $(y^2 - 3x^2)dx + 2xydy = 0, \ \ y(1) = 2$

Решение

$$v = \frac{y}{x} \Rightarrow dy = xdv + vdx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2(v^2 - 3)dx + 2x^2v(xdv + vdx) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3v^2 - 3)dx + 2v(xdv) = 0 \Rightarrow \frac{2vdv}{v^2 - 1} + \frac{3dx}{x} = 0 \Rightarrow \int \frac{2vdv}{v^2 - 1} + 3\int \frac{dx}{x} = C$$

$$\ln(v^2 - 1) + 3\ln x = \ln C$$

Общий интеграл

- $(y^2 - x^2)x = C$

Частное решение

- $xy^2 - x^3 = 3$

$$(2^2 - 1^2)1 = C \qquad C = 3$$

Линейное дифференциальное уравнение

- Уравнение $y' + P(x)y = Q(x)$, где $P(x)$ и $Q(x)$ - заданные непрерывные функции, называется *линейным* дифференциальным уравнением первого порядка.
  Если функция $Q(x) = 0$, то уравнение называется *линейным однородным*, в противном случае - *линейным неоднородным*.

- Метод Бернулли

Якоб Бернулли
(Jacob Bernoulli)
1654 - 1705

Применим подстановку $y = u(x)\,v(x)$, где $u(x)$ – новая неизвестная функция, $v(x)$ – произвольная функция, которую подчиним некоторому условию

$$y' = (uv)' = u'v + uv' \qquad u'v + u(v' + P(x)v) = Q(x)$$

$$v' + P(x)v = 0 \qquad \frac{dv}{v} = -P(x)dx \qquad v = e^{-\int P(x)dx}$$

$$\frac{du}{dx}e^{-\int P(x)dx} = Q(x) \Rightarrow u = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + c$$

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + c\right)$$

Линейное дифференциальное уравнение

- Метод Лагранжа решения линейного уравнения $y' + P(x)y = Q(x)$ – метод вариации произвольной постоянной

Жозеф Луи Лагранж
(Joseph-Louis Lagrange)
1736 - 1813

Сначала решаем однородное уравнение

$$y' + P(x)y = 0 \Rightarrow y = Ce^{-\int P(x)dx}$$

Полученное решение подставляем в исходное неоднородное дифференциальное уравнение, варьируя (считая переменной) постоянную C.

$$\frac{d\left(C(x)e^{-\int P(x)dx}\right)}{dx} + P(x)C(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

$$C'e^{-\int P(x)dx} - P(x)C(x)e^{-\int P(x)dx} + P(x)C(x)e^{-\int P(x)dx} =$$

$$= Q(x) \Rightarrow \frac{dC}{dx} = e^{\int P(x)dx}Q(x)$$

$$C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + \tilde{C}$$

- $$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right)$$

Пример

@ *Решить дифференциальное уравнение* $\frac{dy}{dx} - \frac{2xy}{1+x^2} = 1 + x^2$

Метод Лагранжа *Решение*

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2xy}{1+x^2} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{2xdx}{1+x^2} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{2xdx}{1+x^2} \qquad y = C(1+x^2)$$

$$y = C(x)(1+x^2) \qquad \frac{dC}{dx}(1+x^2) = 1+x^2 \Rightarrow C(x) = x + \tilde{C}$$

$$y = (x+C)(1+x^2) \qquad y = C(1+x^2) + x + x^3$$

Уравнение Бернулли

- Уравнением Бернулли называется уравнение вида: $y' + P(x)y = Q(x)y^n$

При $n = 0$ и $n = 1$ – уравнение становится линейным (неоднородным или однородным)

Уравнение можно представить в виде: $$\frac{1}{y^n}\frac{dy}{dx} + P(x)\frac{1}{y^{n-1}} = Q(x)$$

Уравнение Бернулли приводится к линейному с использованием подстановки $$\frac{1}{y^{n-1}} = z$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d\left(y^{1-n}\right)}{dx} = \frac{1-n}{y^n}\frac{dy}{dx}$$

Другой способ решения (Бернулли): ищем решение в виде $U(x)V(x)$, на одну из функций накладываем условие:

$$\frac{dv}{dx} + P(x)v = 0$$

- $$\frac{dz}{dx} + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x)$$

Пример

@ Решить дифференциальное уравнение $x\dfrac{dy}{dx}+y=y^2\ln x$

Решение

Метод Бернулли

$$y=uv \qquad x\frac{dv}{dx}+v=0 \qquad \frac{dv}{v}=-\frac{dx}{x}\Rightarrow \qquad \int\frac{dv}{v}=-\int\frac{dx}{x}\Rightarrow v=\frac{1}{x}$$

$$x\frac{d(u\frac{1}{x})}{dx}+\frac{u}{x}=\frac{u}{x^2}^{2}\ln x \qquad x\frac{1}{x}\frac{du}{dx}-xu\frac{1}{x^2}+\frac{u}{x}=\frac{u^2}{x^2}\ln x$$

$$\int\frac{du}{u^2}=\int\frac{\ln x}{x^2}dx \qquad -\frac{1}{u}=\frac{-\ln x-1-cx}{x} \qquad y=\frac{1}{\ln x+1+cx}$$

Уравнения, не разрешенные относительно производной

- Дифференциальные уравнения, неразрешенные относительно y' имеют вид:

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0$$

Если в некоторой точке $M(x_o, y_o)$ уравнение $F(x_o, y_o, p) = 0$, где $p = y'$, имеет n действительных корней, причем $F(x,y,p)$ со своими первыми производными непрерывна при $x = x_o$, $y = y_o$ $p = p_i$ и $\partial F / \partial x$ не обращается в ноль, то через точку M проходит n интегральных кривых.

Если данное уравнение возможно разрешить относительно производной, то оно распадается на n уравнений рассмотренного ранее вида, решив которые, получим уравнения n семейств интегральных кривых.

Если уравнение можно представить в виде $x = \varphi(y, y')$ или $y = \psi(x, y')$, то обозначая $y' = p$, и рассматривая p как вспомогательную переменную, после дифференцирования по y или x получим уравнение относительно dp/dy или dp/dx, разрешенные относительно производной. Искомое решение получим в параметрической форме.

Пример

@ Решить дифференциальное уравнение $$x = y\frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

Решение

$$\frac{dy}{dx} = p$$

- $$x = py + p^2$$

$$\left\langle \frac{dx}{dy} = \frac{1}{p} \right\rangle$$

$$\frac{1}{p} = p + (y + 2p)\frac{dp}{dy}$$

- $$\frac{dy}{dp} - \frac{py}{1 - p^2} = \frac{2p^2}{1 - p^2}$$

Линейное неоднородное уравнение

$$\begin{cases} y = -p + \dfrac{C + \arcsin p}{\sqrt{1 - p^2}} \\ x = py + p^2 \end{cases}$$