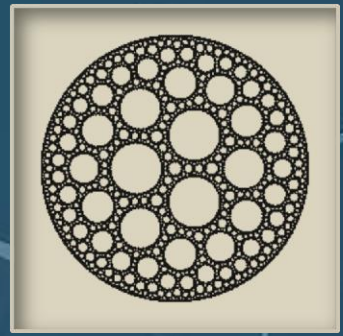
СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ



{ математическое моделирование в инженерных системах - геометрическое истолкование систем дифференциальных уравнений - механическое истолкование систем ДУ - задача с начальными условиями - краевая задача - системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами - системы однородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами }

Горячев В.Д. Лекции по математическому анализу

Математическое моделирование инженерных систем

Математическое моделирование физических систем базируется на математическом описании физических процессов с введением внешних воздействий и внутренних связей. На основании анализа такой модели можно предсказать поведение конкретной системы.

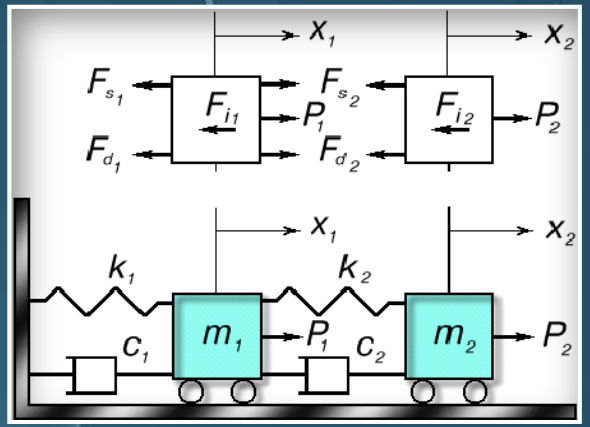
В зависимости от типа определяющих систему условий, задачи подразделяются на *задачи с начальными условиями и задачи с граничными (краевыми) условиями*.

С последними задачами часто связаны задачи определения собственных частот системы - *задачи на определение собственных чисел и векторов*.

Для описания используются известные законы физики и химии, в результате их использования получается набор алгебраических и дифференциальных уравнений, решая которые можно предсказать реакцию сети на внешние возмущения.

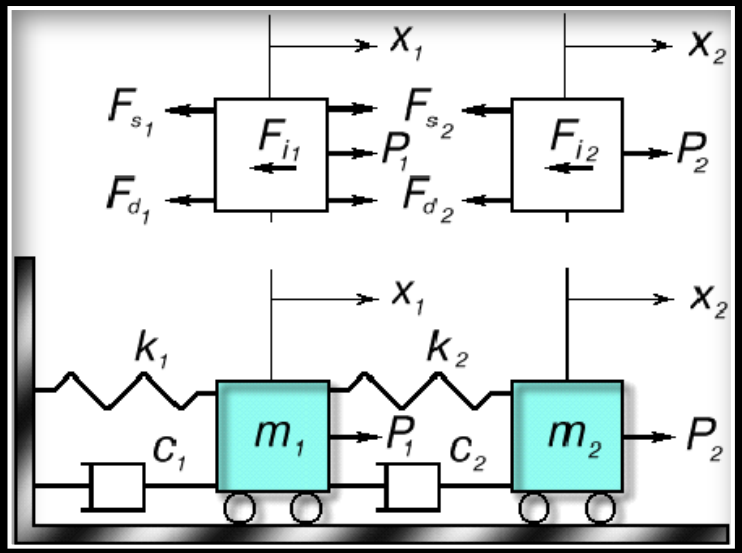
При рассмотрении механических систем могут быть введены следующие компоненты: инверсное сопротивление (демпфер) – $F_d = c\dot{x}$ масса (инертность, при вращении - момент инерции) – $F_i = m\ddot{x}$, упругость (пружина) – $F_s = kx$. В уравнениях соответственно присутствуют перемещения, скорости, ускорения тел и физические параметры – масса m, жесткость s, коэффициент сопротивления k.

В механической системе, приведенной на схеме, возможно только горизонтальное перемещение двух масс без учета внешнего трения. Приложенные к грузам силы являются динамическими, однако могут интерпретироваться как статические в уравнениях состояния после абстрагирования схемы к диаграмме, приведенной вверху рисунка.



- Для масс 1 и 2 справедлив следующий баланс сил:

$$1)\ F_{s_1} + F_{d_1} + F_{i_1} - P_1 - F_{s_2} - F_{d_2} = 0 \quad 2)\ F_{s_2} + F_{d_2} + F_{i_2} - P_2 = 0$$



Силы инерции, сопротивления движению (демпфирования) и упругости определяются по формулам:

$$F_{s_1} = k_1 x_1 \quad F_{s_2} = k_2 (x_2 - x_1)$$

$$F_{d_1} = c_1 \dot{x}_1 \quad F_{d_2} = c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$$

$$F_{i_1} = m_1 \ddot{x}_1 \quad F_{i_2} = m_2 \ddot{x}_2$$

Система ДУ с начальными условиями

- После подстановки всех сил в уравнения баланса, последние могут быть записаны как система дифференциальных уравнений в матричной форме

$$\underset{[K]}{\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}}\underset{(X)}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}+\underset{[C]}{\begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}}\underset{(\dot{X})}{\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}}+\underset{[M]}{\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}}\underset{(\ddot{X})}{\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix}}=\underset{(P)}{\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}}$$

матрицы перемещения, скорости и ускорения элементов

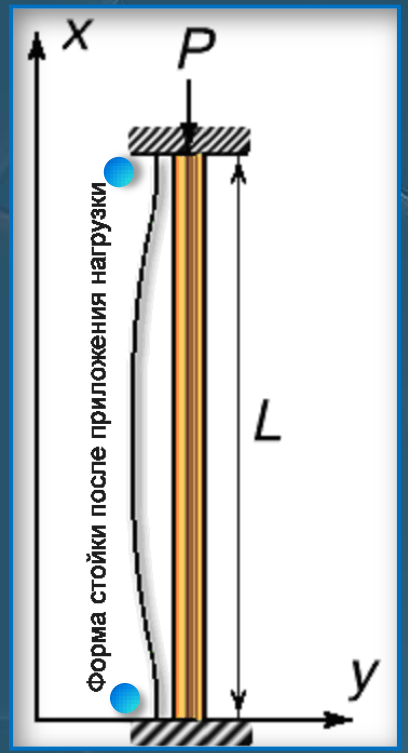
$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = P$ матрица внешних сил,

- матрица масс,
- матрица параметров жесткости системы,
- матрица коэффициентов механического поступательного сопротивления

Начальные условия

$$X(t=0) = X_0$$

$$\dot{X}(t=0) = \dot{X}_0$$



Пример из строительной механики

Одной из основных задач является определение напряжений в элементах строительных конструкций, в частности в балках и вертикальных стойках, при различных способах их нагружения и разной форме их поперечных сечений.

Уравнение, описывающее форму нагруженной стойки с жестко зафиксированными концами может быть представлено в виде

$$\frac{d^4y}{dx^4} + K^2\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

$$K = \frac{P}{EI}$$

P - сила нагружения стойки

I - момент инерции поперечного сечения

E - модуль упругости материала (модуль Юнга)

Граничные условия

$$x = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y' = 0 \end{cases}$$

$$x = L \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y' = 0 \end{cases}$$

- Критическая величина нагружения стойки ***P*** может быть определена после интегрирования линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^4y}{dx^4} + K^2\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \qquad r^4 + K^2r^2 = r^2(r^2 + K^2) = 0 \qquad r_1 = r_2 = 0,\ r_3 = -Ki, r_4 = Ki,$$

$$y = A\sin Kx + B\cos Kx + Cx / L + D$$

$$x = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = B + D \\ 0 = AK + C / L \end{cases}$$

$$x = L \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = A\sin(Kl) + B\cos(KL) + C + D \\ 0 = AK\cos(Kl) - BK\sin(KL) + C / L \end{cases}$$

$$@\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \sin G & \cos G & 1 & 1 \\ G & 0 & 1 & 0 \\ G\cos G & -G\sin G & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

G **A** **0**

Однородная система

=

Тривиальное решение

$$A = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Определение ненулевых одновременно элементов матрицы относится к проблеме определения множества собственных значений матрицы **G**, то есть подходящих значений $\lambda = KL$, при которых будут удовлетворяться граничные условия, а решение дифференциального уравнения будет не тривиальным.

Геометрическое толкование системы ДУ

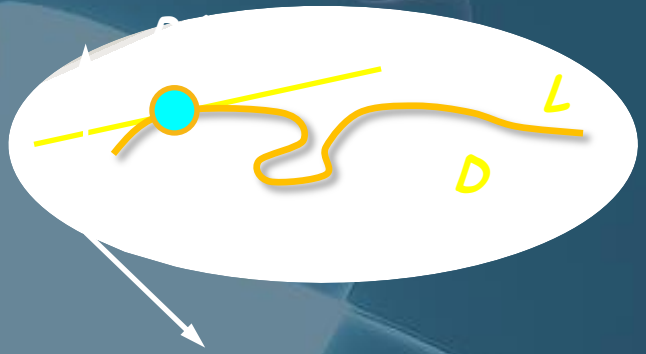
Пусть дана нормальная система двух уравнений и начальные условия:

$$\begin{cases} y'(x) = F_1(x, y, z) \\ z'(x) = F_2(x, y, z) \end{cases} \qquad y(x = x_0) = y_0,\ z(x = x_0) = z_0$$

Пусть известно частное решение системы: $y = f(x),\ z = \varphi(x)$

Эти уравнения в области **D** пространства *Oxyz* определяют интегральную кривую **L** (пересечение двух цилиндров), проходящую через точку **P** (x_0, y_0, z_0). Система данных дифференциальных уравнений устанавливает связь между координатами точек интегральных кривых и направлением касательной к ним в этих точках.

$$\frac{X - x}{1} = \frac{Y - y}{f'(x_1)} = \frac{Z - z}{\varphi'(x_1)}$$



Интегрирование системы ОДУ методом исключения

- Система уравнений сводится к одному ОДУ n - го порядка – такой метод называется методом исключения.

Рассмотрим этот метод на примере нормальной системы ОДУ:

$$\begin{cases} y_1'(x) = F_1(x, y_1, y_2) \\ y_2'(x) = F_2(x, y_1, y_2) \end{cases}$$

$$y_1' = F_1(x, y_1, y_2) \Rightarrow y_2(x) = \Phi(x, y_1, y_1')$$

$$y_1'' = \frac{d}{dx} F_1(x, y_1, y_2) = \frac{\partial}{\partial x}(F_1(x, y_1, y_2) + \frac{\partial}{\partial y_1}(F_1(x, y_1, y_2)\frac{dy_1}{dx} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y_2}(F_1(x, y_1, y_2)\frac{dy_2}{dx} = \frac{\partial}{\partial x}(F_1(x, y_1, \Phi(x, y_1, \frac{dy_1}{dx})) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y_1}(F_1(x, y_1, \Phi(x, y_1, \frac{dy_1}{dx}))F_1(x, y_1, \Phi(x, y_1, \frac{dy_1}{dx})) + \frac{\partial}{\partial y_2}(F_2(x, y_1, \Phi(x, y_1, \frac{dy_1}{dx}))F_2(x, y_1, \Phi(x, y_1, \frac{dy_1}{dx}))$$

Получили одно дифференциальное уравнение 2 - го порядка для y_1.

Интегрируем это уравнение. Затем находим решение для y_2.

Пример

@ $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_2 + 1 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = y_1 + 1 \end{cases}$

Решение

$$\frac{dy_1}{dx} = y_2 + 1 \Rightarrow y_2(x) = \frac{dy_1}{dx} - 1$$

Получили одно дифференциальное уравнение 2 - го порядка для y_1.

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{d}{dx}(y_2 + 1) = \frac{dy_2}{dx} = y_1 + 1 \Rightarrow \quad \frac{d^2 y_1}{dx^2} = y_1 + 1$$

$$y_1'' - y_1 = 1 \Rightarrow k^2 - 1 = 0 \Rightarrow k_1 = -1, k_2 = 1 \Rightarrow Y_1 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x}$$

$$\bar{y}_1 = A \Rightarrow \bar{y}_1' = 0, \bar{y}_1'' = 0 \Rightarrow -A = 1 \Rightarrow A = -1$$

$$y_1 = Y_1 + \bar{y}_1 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} - 1$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} - 1 \\ -C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} - 1 \end{pmatrix}$$

$$y_2 = \frac{dy_1}{dx} - 1 = (C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} - 1)' - 1 = -C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} - 1$$

@ $\dfrac{dx}{dt}+y=0,\ \dfrac{dx}{dt}-\dfrac{dy}{dt}=3x+y$

Решение

$-\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{d^2x}{dt^2}\Rightarrow\dfrac{d^2x}{dt^2}+\dfrac{dx}{dt}=3x-\dfrac{dx}{dt}$

- $\dfrac{d^2x}{dt^2}+2\dfrac{dx}{dt}-3x=0 \quad k^2+2k-3=0$

$k_{1,2}=-1\pm\sqrt{1+3}=-1\pm 2 \quad k_1=1;\ k_2=-3$

- $X=C_1e^{t}+C_2e^{-3t}$

$Y=-\dfrac{dX}{dt}=-C_1e^{t}+3C_2e^{-3t}$

- $Y=-C_1e^{t}+3C_2e^{-3t}$

$$\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_1e^{t}+C_2e^{-3t}\\-C_1e^{t}+3C_2e^{-3t}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{t} & e^{-3t}\\-e^{t} & 3e^{-3t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\C_2\end{pmatrix}$$

Нахождение интегрируемых комбинаций

$$\frac{dx_k}{dt} = f_k(t, x_1, x_2, \ldots, x_n),\ k = 1, 2, \ldots, n$$

С помощью проходящих арифметических операций (сложения, вычитания, умножения, деления) из уравнений системы ДУ образуют так называемые интегрируемые комбинации, т.е. решаемые уравнения вида:

$$F\left(t, u(x_1, x_2, \ldots, x_n), \frac{du(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{dt}\right) = 0$$

Каждая интегрируемая комбинация дает один *первый интеграл*. Если найдено **n** независимых первых интегралов системы ДУ, то ее интегрирование закончено; если же найдено **m** независимых первых интегралов, где **m<n**, то система сводится к системе ДУ с меньшим числом неизвестных функций.

@ *Найти решение системы ДУ*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{x-y}{z-t} \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{x-y}{z-t} \\ \dfrac{dz}{dt} = x-y+1 \end{cases}$$

Решение

Вычитая почленно второе уравнение из первого получим:

$$\frac{d(x-y)}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x-y=C_1}$$

Первый интеграл

Подставим это выражение во второе и третье уравнение:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{C_1}{z-t} \\ \dfrac{dz}{dt} = C_1+1 \end{cases} \quad \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{C_1}{C_1 t + C_2} \Rightarrow \quad y = \int \frac{C_1}{C_1 t + C_2} dt + C_3$$

$$\Rightarrow z = (C_1+1)t + C_2$$

@

$$x - y = c_1 \qquad y = \ln|c_1 t + c_2| + c_3 \qquad z = (c_1 + 1)t + c_2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln|c_1 t + c_2| + c_1 + c_3 \\ \ln|c_1 t + c_2| + c_3 \\ (c_1 + 1)t + c_2 \end{pmatrix}$$

Метод Эйлера

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{cases} \quad \bullet \quad \begin{cases} y_1 = C_1y_{11} + C_2y_{21} \\ y_2 = C_1y_{12} + C_2y_{22} \end{cases} \qquad y_1 = \beta_1 e^{\lambda x}, \quad y_2 = \beta_2 e^{\lambda x}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda\beta_1 e^{\lambda x} \\ \lambda\beta_2 e^{\lambda x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 e^{\lambda x} \\ \beta_2 e^{\lambda x} \end{pmatrix} \quad \lambda \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{B} = 0 \quad \bullet \quad \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = 0$$

Характеристическое уравнение, его корни λ_1, λ_2- характеристические числа.

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda_1 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda_2 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$$

@ $\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 \\ y_2' = -4y_1 + 4y_2 \end{cases}$

Решение

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -4 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (1-\lambda)(4-\lambda) - 4 = 0 \quad \lambda^2 - 5\lambda = 0 \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 5 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad -4\beta_1 - \beta_2 = 0 \quad \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{5x} & -4e^{5x} \end{pmatrix}$$ *Фундаментальная система*

$$\begin{cases} y_1 = C_1 + C_2 e^{5x} \\ y_2 = C_2 - 4C_2 e^{5x} \end{cases}$$ *Общее решение* $$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_1 & -4C_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ e^{5x} \end{pmatrix}$$