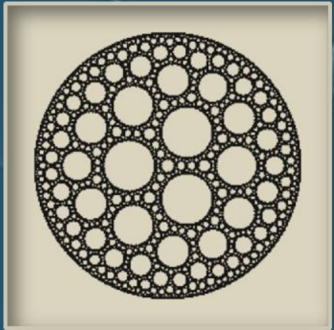
ПОНЯТИЕ ОБ УРАВНЕНИЯХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ



[основные типы уравнений второго порядка в математической физике - уравнение теплопроводности - уравнения в частных производные - уравнения переноса количества движения в жидкости – волновое уравнение – примеры]

Основные типы уравнений

- Под термином “Уравнения математической физики” обычно понимают линейные дифференциальные уравнения второго порядка с частными производными, к которым приводит моделирование определенных физических задач.

$$a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+F\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0$$

где $a_{11}(x,y)$, $a_{12}(x,y)$, $a_{22}(x,y)$ некоторые функции двух переменных.

Три основных типа уравнений:

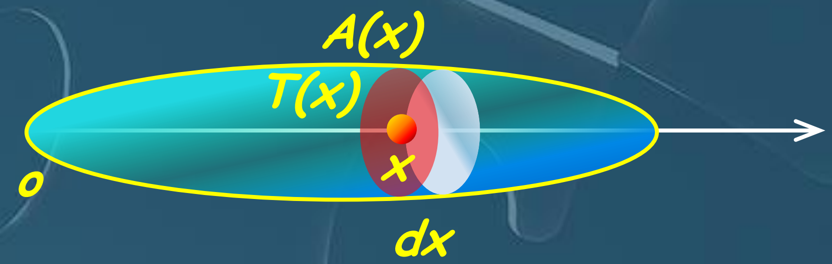
- Гиперболический тип: $a_{12}^2-a_{11}a_{22}>0$
- Эллиптический тип: $a_{12}^2-a_{11}a_{22}<0$
- Параболический тип: $a_{12}^2-a_{11}a_{22}=0$

Уравнение теплопроводности

Дифференциальными уравнениями в частных производных описываются математические модели переноса в сплошных средах.

- Одномерный перенос тепла

$$q_x = -kA\frac{\partial T}{\partial x}$$



Скорость, с которой тепло поступает в контрольный объем слева, через поперечное сечение A выделенного объема, может быть записана на основании закона *Фурье*.

k - коэффициент теплопроводности материала.

$A = A(x)$ - площадь поперечного сечения тела.

$\frac{\partial T}{\partial x}$ - скорость изменения температуры (градиент) вдоль оси тела.

Уравнение теплопроводности

Скорость с которой тепло покидает правое сечение выделенного объема

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x}dx = -kA\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(-kA\frac{\partial T}{\partial x}\right)dx$$

Уравнение баланса энергии для выделенного контрольного объема за время dt содержит следующие члены: входящее тепло за время dt + тепло, образованное за счет внутренних источников за время dt = выходящее тепло за время dt + изменение внутренней энергии объема за время dt

$$q_x dt + QAdt = q_{x+dx}dt + c_p\rho\frac{\partial T}{\partial t}dt$$

где Q - скорость генерации тепла, приходящая на единицу объема (тепловой источник), c_p - теплоемкость, ρ - плотность и $\frac{\partial T}{\partial t}dt = dT$ - изменение температуры контрольного объема за время dt.

Получаем *нестационарное уравнение теплопроводности*

$$c_p\rho\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(kA\frac{\partial T}{\partial x}\right) + QA$$

Уравнения в частных производных

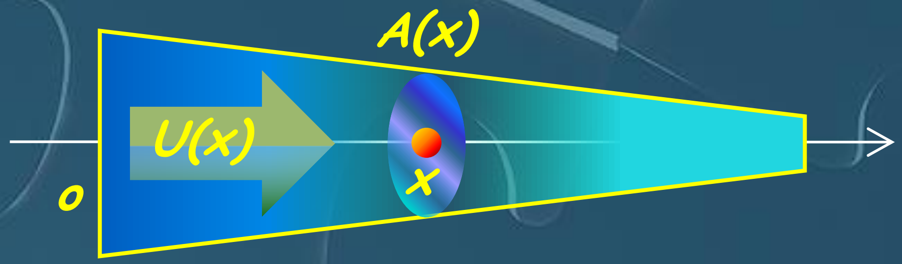
Специальные случаи определяются физическими условиями процесса передачи тепла и описываются следующими типами дифференциальных уравнений в частных производных:

- Уравнение Фурье: $c_p\rho\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(kA\frac{\partial T}{\partial x}\right)$ (отсутствует источник тепла – $Q = 0$)
- Уравнение Пуассона: $\frac{\partial}{\partial x}\left(kA\frac{\partial T}{\partial x}\right) + QA = 0$ (стационарный процесс)
- Уравнение Лапласа: $\frac{\partial}{\partial x}\left(kA\frac{\partial T}{\partial x}\right) = 0$ (стационарный процесс без тепловыделения - $Q = 0$)
- Уравнение Лапласа: $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$ (стационарный процесс в теле постоянного сечения и с постоянным коэффициентом теплопроводности)

Уравнение переноса количества движения в жидкости

- Одномерное движение жидкости

Для каждого поперечного сечения A в конфузоре расход жидкости будет одинаков $\rho UA = const$, где ρ - плотность, U - скорость течения, A - площадь поперечного сечения.



Это условие можно записать как уравнение сохранения массы:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho UA) = 0$$

Если считать жидкость несжимаемой, а поле скоростей имеющим потенциал $U(x) = \mathbf{grad}\,\Phi(x) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\bar{i}$, то уравнение движения примет вид:

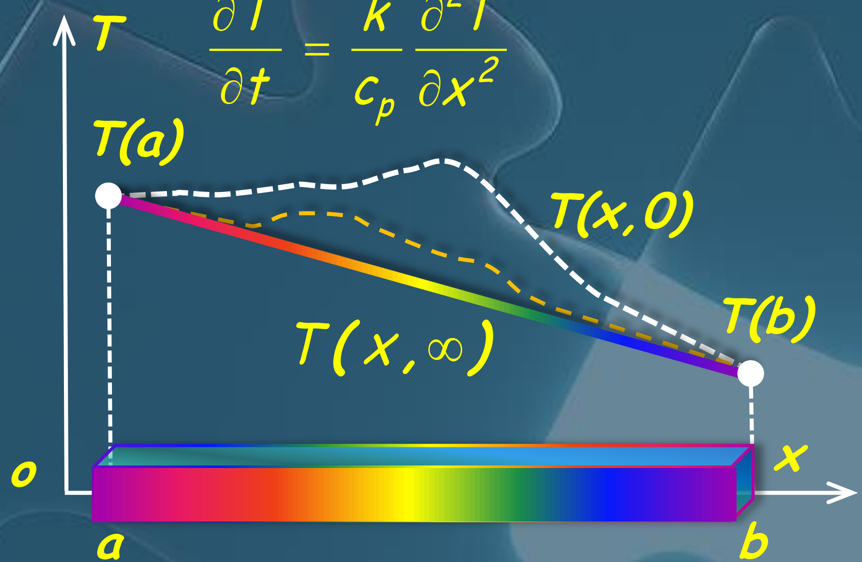
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho A \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) = 0$$

Решение уравнений с заданными начальными условиями

Вывод подобных уравнений для трехмерного физического пространства удобно делать с использование интегральных соотношений из теории поля.
Например, уравнение нестационарной теплопроводности в трехмерном случае изотропного тела (из однородного материала с постоянным коэффициентом теплопроводности) может быть записано в следующем виде:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{c_p}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

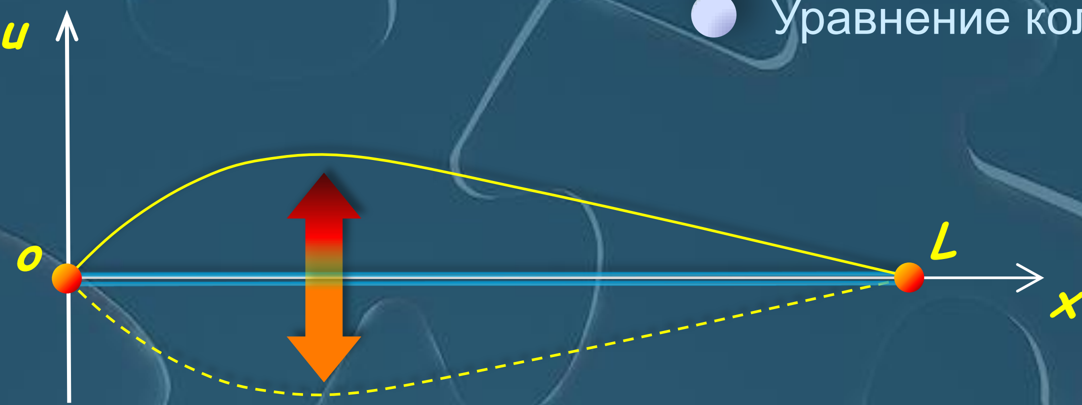
$$\frac{c_p}{k}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{Q}{k}$$



Решение уравнений в частных производных требует знания начальных условий - распределение температуры в начальный момент времени и граничных условий - распределение температуры и/или ее градиентов на границе. Для линейных уравнений общее решение может быть найдено как суперпозиция решений стационарного уравнения и решения для нестационарных условий.

Волновое уравнение

- Уравнение колебаний струны



Дана тонкая однородная нить, работающая только на растяжение – струна.

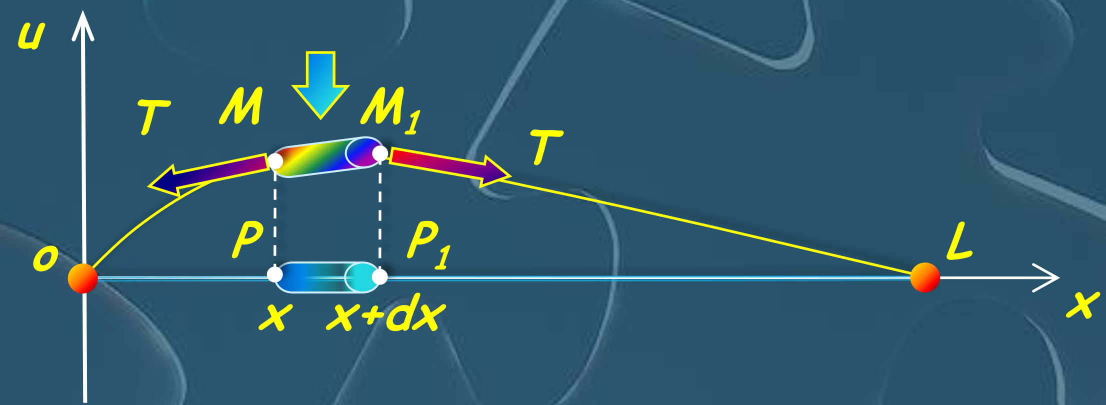
В положении равновесия струна представляет собой отрезок $0 \le x \le L$

Концы струны закреплены в точках $x = 0$ и $x = L$.

Струна выводится из положения равновесия (принимает форму дуги с уравнением $f(x)$) и отпускается.

Возникают свободные колебания струны около положения равновесия.

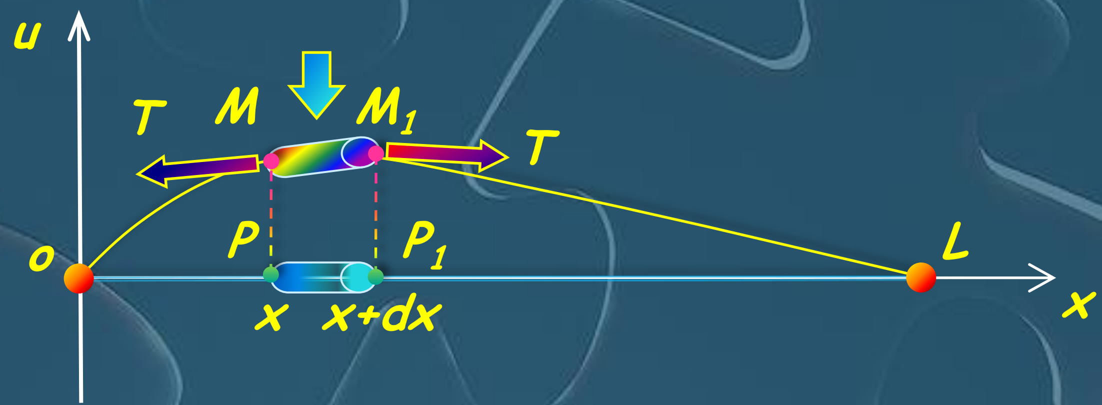
Волновое уравнение



На элемент струны MM_1 (в положении равновесия - отрезок PP_1 массой $\rho\Delta x$) действуют силы натяжения T и $T + dT$, направленные по касательной с углами α и $\alpha + \Delta\alpha$ относительно оси x.

К этим двум силам добавляется сила инерции $I \approx -\rho\Delta x \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_M$

Равнодействующая всех трех сил будет равна нулю.

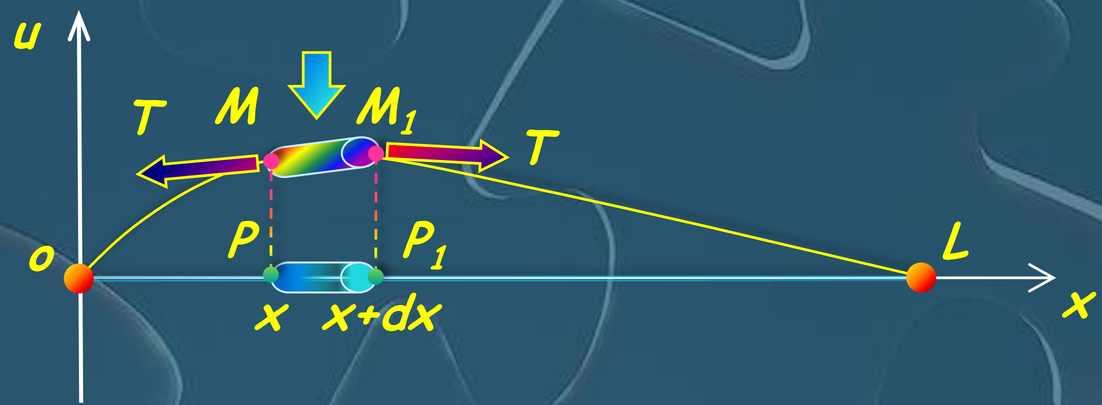


Проекция на ось x: $(T+\Delta T)\cos(\alpha+\Delta\alpha)-T\cos\alpha=0 \qquad T_0=T\cos\alpha$

Проекция на ось u: $(T+\Delta T)\sin(\alpha+\Delta\alpha)-T\sin\alpha-\rho\Delta x\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_M=0$

$$T\sin\alpha=T_0(t)\operatorname{tg}\alpha=T_0(t)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_M \quad\Rightarrow\quad T_0(t)\frac{\Delta_x\left(\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)_M\right)}{\Delta x}=\rho\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_M$$

Волновое уравнение



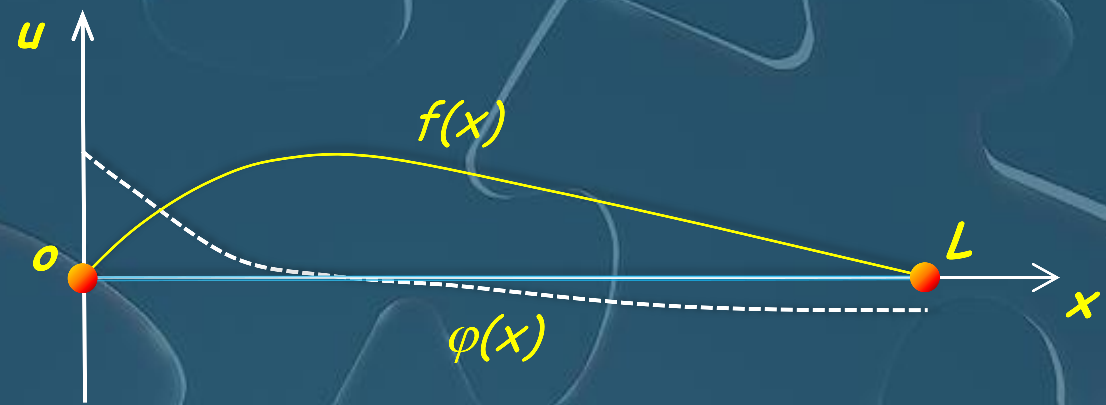
Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$ (устремляя к нулю длину элемента MM_1),

получим $T_0(t)\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_M = \rho\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_M$ $\qquad \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{T_0(t)}{\rho}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

При малых по абсолютной величине колебаниях $\dfrac{T_0(t)}{\rho} = const = a^2$

Уравнение колебаний струны: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

Волновое уравнение



Начальные условия:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

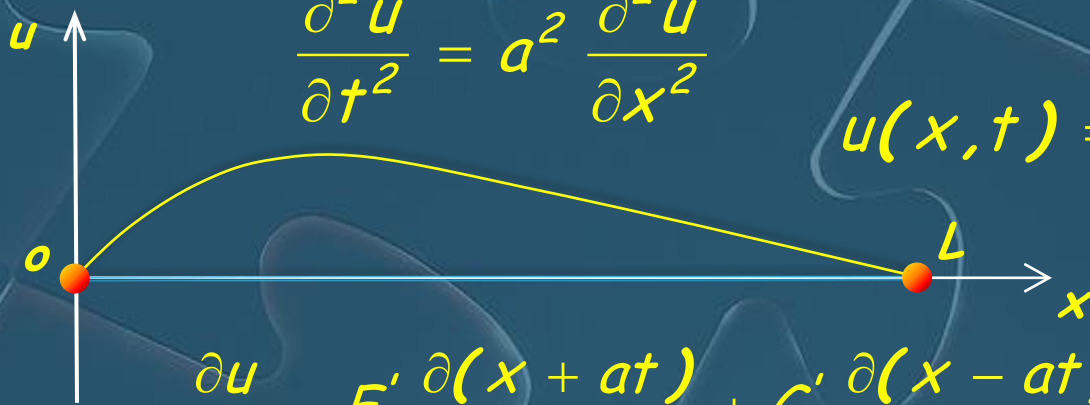
1) $u(x,0) = f(x)$ 2) $\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \varphi(x)$

Граничные условия:

1) $u(0,t) = 0$ 2) $u(L,t) = 0$

Метод Даламбера

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$



$$u(x,t) = F(x+at) + G(x-at)$$

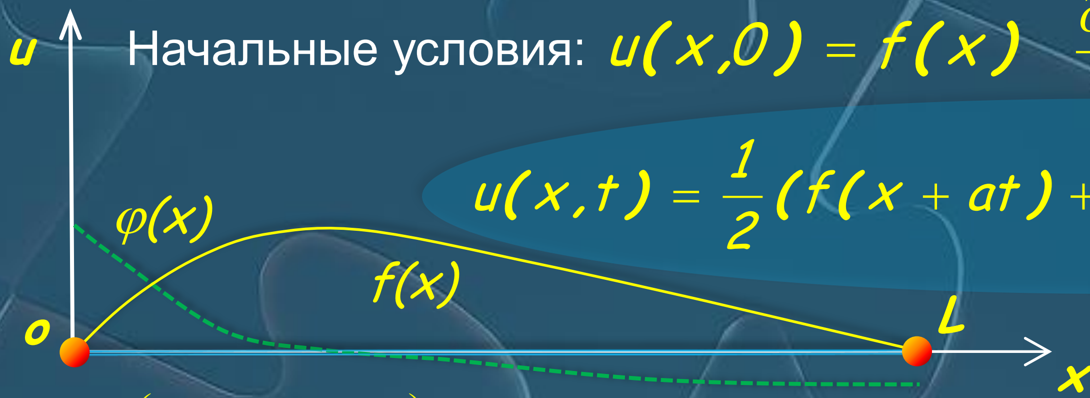
$$\frac{\partial u}{\partial t} = F' \frac{\partial (x+at)}{\partial t} + G' \frac{\partial (x-at)}{\partial t} = aF' - aG'$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2(F'' + G'') \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = F' + G' \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F'' + G''$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2(F'' + G'') \equiv a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Метод Даламбера

Начальные условия: $u(x,0) = f(x) \quad \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \varphi(x)$



$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x+at) + f(x-at)\right) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \varphi(v)\,dv$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\varphi(v)\,dv\right) = \frac{1}{2a}\left(a\varphi(x+at) - (-a)\varphi(x-at)\right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\varphi(v)\,dv\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varphi(x+at) + \frac{1}{2}\varphi(x-at)\right) = \frac{1}{2}a\varphi' - \frac{1}{2}a\varphi' = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\varphi(v)\,dv\right) = \frac{1}{2a}\left(\varphi(x+at) - \varphi(x-at)\right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\varphi(v)\,dv\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2a}\varphi(x+at) + \frac{1}{2a}\varphi(x-at)\right) = \frac{\varphi'}{2a} - \frac{\varphi'}{2a} = 0 \qquad 0 \equiv 0$$

Пример

@ Найти движение струны, первоначально находящейся в нейтральном положении и имеющей скорость в начальный момент времени

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$L = 9,\ a = 2$

Решение

$$u(x,t) = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \sin\frac{\pi v}{L}\,dv = \frac{L}{2a\pi}\left[\cos\left(\frac{\pi x}{L} - \frac{\pi a t}{L}\right) - \cos\left(\frac{\pi x}{L} + \frac{\pi a t}{L}\right)\right]$$

$$u(x,t) = \frac{9}{4\pi}\left[\cos\left(\frac{\pi x}{9} - \frac{2\pi t}{9}\right) - \cos\left(\frac{\pi x}{9} + \frac{2\pi t}{9}\right)\right]$$