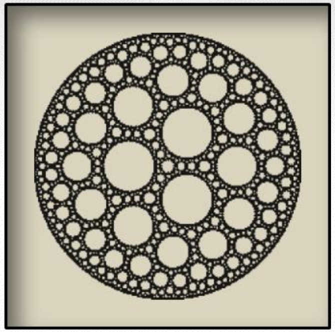
Функциональные и степенные ряды



{функциональные ряды – степенные ряды – область сходимости – порядок нахождения интервала сходимости - пример – радиус интервала сходимости – примеры }

- Пусть задана бесконечная последовательность функций, определенных в области *D*: $U_1(x); U_2(x); U_3(x) \ldots U_n(x) \ldots$

Выражение вида:

$$U_1(x) + U_2(x) + U_3(x) + \ldots + U_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) \quad (1)$$

называется **функциональным рядом**.

Если в выражении *(1)* положим $x = x_0$, то получим некоторый числовой ряд:

$$U_1(x_0) + U_2(x_0) + U_3(x_0) + \ldots + U_n(x_0) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x_0) \quad (2)$$

- Функциональный ряд *(1)* называется ***сходящимся*** в точке x_0, если числовой ряд *(2)*, получившийся из ряда *(1)* подстановкой $x = x_0$, является сходящимся рядом. При этом x_0 называется ***точкой сходимости*** ряда.

Множество всех точек сходимости функционального ряда называется ***областью сходимости*** данного ряда.

Обозначим область сходимости ряда – D_s .

Как правило, область D_s не совпадает с областью D, а является ее частью:

$$D_s \subset D$$

@ Найти область сходимости функционального ряда:

$$\ln x + \ln^2 x + \dots + \ln^n x + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x$$

Решение

Данный ряд является суммой членов геометрической прогрессии со знаменателем $q = \ln x$

Такой ряд сходится, если $|q| < 1 \Rightarrow |\ln x| < 1 \Rightarrow$

$$-1 < \ln x < 1 \Rightarrow 1/e < x < e$$

Область сходимости ряда - D_s

Область определения функций $\ln^n x$: $D: \quad x > 0$

Поэтому: $D_s \subset D$

Область определения сходимости функционального ряда

- Сумма функционального ряда *(1)* зависит от взятой точки области сходимости, следовательно сама является некоторой функцией от x:

Для функции $f(x)$ имеет место разложение

$$f(x) = U_1(x) + U_2(x) + U_3(x) + \ldots + U_n(x) + \ldots$$

Ряд *(1)* сходится к функции $f(x)$

Область определения этой функции совпадает с областью сходимости ряда D_s.

@

Найти сумму ряда: $$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

Решение

Это геометрическая прогрессия со знаменателем $q = x$ и первым членом $b_1 = 1$.

$$S = \frac{b_1}{1-q} \quad |q| < 1$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots \quad |x| < 1$$

$$S = \frac{1}{1-x} \quad |x| < 1$$

Имеет место разложение:

- Как и в случае числовых рядов, для функционального ряда *(1)* можно составить последовательность частичных сумм :

$$\underbrace{U_1(x)+U_2(x)+U_3(x)+\ldots+U_n(x)}_{S_n(x)}+\underbrace{U_{n+1}(x)+U_{n+2}(x)\ldots}_{r_n(x)}$$

$$\underbrace{U_1(x)}_{S_1(x)} \qquad \underbrace{U_1(x)+U_2(x)}_{S_2(x)}$$

Тогда: $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$ для любых x из области сходимости.

$r_n(x)=U_{n+1}(x)+U_{n+2}(x)+\ldots$ - n-й остаток ряда.

Таким образом: $f(x)=S_n(x)+r_n(x)$

При $n\to\infty$ $r_n(x)\to 0 \Rightarrow f(x)\approx S_n(x)$

- Среди функциональных рядов в математике и ее приложениях особую роль играет ряд, членами которого являются степенные функции аргумента *x*, то есть так называемый ***степенной ряд***.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \qquad (1)$$

где $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$: постоянные числа – коэффициенты степенного ряда.

Ряд *(1)* расположен по степеням *x*.

Рассматривают также степенной ряд, расположенный по степеням $(x - x_0)$, то есть ряд вида:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \ldots + a_n (x - x_0)^n + \ldots \qquad (2)$$

Ряд *(2)* легко приводится к ряду *(1)* подстановкой $x - x_0 = z$, поэтому при изучении степенных рядов мы ограничимся степенными рядами вида *(1)*.

Любой степенной ряд вида *(1)* сходится в точке $x = 0$:

$$a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0^2 + \ldots + a_n \cdot 0^n + \ldots = a_0$$

Об области сходимости степенного ряда *(1)* можно судить, исходя из следующей теоремы Абеля:

Теорема Абеля

1. Если степенной ряд *(1)* сходится при некотором значении $x = x_0 \neq 0$ то он абсолютно сходится при всех значениях x, для которых выполняется условие: $|x| < |x_0|$

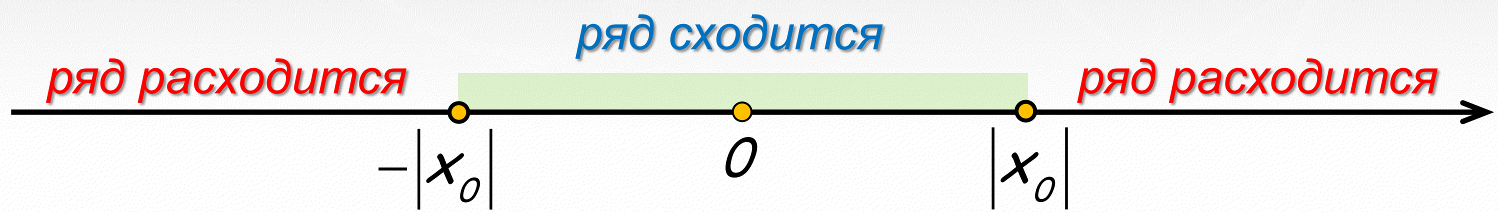
2. Если степенной ряд *(1)* расходится при некотором значении $x = x_0 \neq 0$ то он расходится при любом значении x при котором: $|x| > |x_0|$

Сходимость степенных рядов

Из теоремы следует, что существует такая точка x_0 ,что интервал:

$$\left(-\left|x_0\right|;\left|x_0\right|\right)$$

весь состоит из точек сходимости ряда, а при всех x вне этого интервала ряд расходится.



Интервал $\left(-\left|x_0\right|;\left|x_0\right|\right)$ называют *интервалом сходимости* степенного ряда.

Положив $\left|x_0\right| = R$ интервал сходимости можно записать в виде : $(-R; R)$.

Число R называют *радиусом сходимости* степенного ряда.

В частности, если ряд сходится лишь в одной точке $x_0 = 0$, то считаем $R = 0$.

Если ряд сходится при всех действительных значениях x, то считаем $R = \infty$

На концах интервала сходимости, то есть при $x = -R$ и при $x = R$ сходимость ряда проверяется в каждом случае отдельно.

Для нахождения радиуса сходимости составим ряд из модулей членов данного степенного ряда

$$|a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \ldots + |a_n x^n| + \ldots$$

и применим к нему признак Даламбера.

Допустим существует предел:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = |x| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \neq 0$$

По признаку Даламбера ряд сходится, если:

$$|x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1 \Rightarrow |x|<\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} \Rightarrow |x|<\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

Таким образом, для степенного ряда *(1)* радиус сходимости равен:

- $$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

Аналогично, пользуясь признаком Коши, можно установить, что

- $$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$$

- Если $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$, то можно убедиться, что ряд сходится на всей числовой оси, то есть $R=\infty$.

- Интервал сходимости степенного ряда *(2):* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$

  находят из неравенства $|x-x_0|<R$

- Если степенной ряд содержит не все степени x, то есть задан неполный степенной ряд, то интервал сходимости ряда находят без определения радиуса сходимости, а непосредственно применяя признаки Даламбера или Коши для ряда, составленного из модулей членов данного ряда.

@ Найти область сходимости степенного ряда : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

Решение

Найдем радиус сходимости по формуле: $R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$

$$a_n = \frac{1}{n!} \quad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)n!}$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)n!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty$$

Следовательно, ряд сходится при всех действительных значениях x.