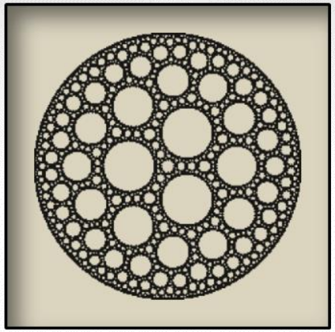
Ряды Фурье



{тригонометрический ряд – тригонометрическая система – примеры - разложение на интервале [-l; l] для функций произвольного периода - неполные ряды – разложение по синусам и косинусам – четные и нечетные продолжения}

- *Тригонометрическим рядом* называется функциональный ряд вида:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\right) \quad (1)$$

Действительные числа $a_0, a_1, b_1, b_2, \ldots, a_n, b_n$, называются коэффициентами ряда.

Коэффициенты тригонометрического ряда определяются по формулам:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx \qquad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)\,dx \quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(nx)\,dx$$

Пусть $f(x)$ – произвольная периодическая функция с периодом $T=2\pi$. Предположим, что функция $f(x)$ раскладывается в тригонометрический ряд, то есть $f(x)$ является суммой ряда:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\right)$$

Достаточное условие разложимости функции *f(x)* в ряд Фурье дает ***теорема Дирихле***.

Рассмотрим функцию $f(x)$, имеющую период $T = 2\pi$. (2π – периодические функции).

Теорема

Пусть 2π - периодическая функция $f(x)$ на отрезке $[-\pi; \pi]$ удовлетворяет двум условиям:

1. Функция $f(x)$ кусочно – непрерывна, то есть непрерывна или имеет конечное число точек разрыва 1 рода.
2. Функция $f(x)$ кусочно – монотонна, то есть монотонна на всем отрезке, либо этот отрезок можно разбить на конечное число интервалов так, что на каждом из них функция монотонна.

Тогда соответствующий функции $f(x)$ ряд Фурье сходится на этом отрезке и при этом:

1. В точках непрерывности функции сумма ряда $S(x)$ совпадает с самой функцией: $S(x) = f(x)$.
2. В каждой точке x_0 разрыва функции сумма ряда равна: $S(x_0) = \frac{1}{2}\left(\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)\right)$
3. На концах отрезка $[-\pi; \pi]$ сумма ряда равна: $S(-\pi) = S(\pi) = \frac{1}{2}\left(\lim\limits_{x \to -\pi + 0} f(x) + \lim\limits_{x \to \pi - 0} f(x)\right)$

Частичные суммы $S_n(x)$ тригонометрического ряда являются линейными комбинациями из системы функций: $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots$ с периодом $T = 2\pi$.

$$S(x+2\pi k) = S(x), \quad T = 2\pi. \quad x \in (-\infty; \infty)$$

Разложить периодическую функцию $f(x)$ с периодом $T = 2\pi$ в тригонометрический ряд – означает найти сходящийся тригонометрический ряд, сумма которого равна $f(x)$.

Функции $f(x)$ и $g(x)$, непрерывные на отрезке $[a, b]$ называются ортогональными на этом отрезке, если $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$

Конечная или бесконечная система функций $\varphi_n(x)$, $(n = 0,1,2,\ldots)$, интегрируемых на отрезке $[a, b]$, называется ортогональной системой на этом отрезке, если для любых номеров n, m, не равных друг другу, выполняется равенство

$$\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)dx = 0.$$

- **Теорема:** Тригонометрическая система функций: *1, cosx, sinx, cos2x , sin2x, ., cos nx , sin nx , ...* является ортогональной на отрезке [-π; π] .

$$n \neq 0 \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos(nx)\,dx = \left.\frac{\sin(nx)}{n}\right|_{-\pi}^{\pi} = 0 \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin(nx)\,dx = -\left.\frac{\cos(nx)}{n}\right|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$m \neq n \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m-n)x + \cos(m+n)x]\,dx = 0.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,dx = 0 \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\cos(nx)\,dx = 0$$

$$m = n \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos 2nx}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left[x + \frac{\sin 2nx}{2n}\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx)\,dx = \pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cos(nx)\,dx = 0.$$

@ Вывести формулы для коэффициентов ряда Фурье:

Решение

$$f(x)=\frac{a_o}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\right)$$

$$f(x)\cos(mx)=\frac{a_o}{2}\cos(mx)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(mx)\cos(nx)+b_n\cos(mx)\sin(nx)\right)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(mx)dx=\frac{a_o}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)\cos(nx)dx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)\sin(nx)dx\right)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(mx)dx=a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(mx)dx=a_n\pi$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx \qquad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)dx,\quad n=1,2,\dots \quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(nx)dx$$

Разложить в ряд Фурье функцию *f(x)* периода *2π*, заданную на отрезке [-π ; π] формулой:

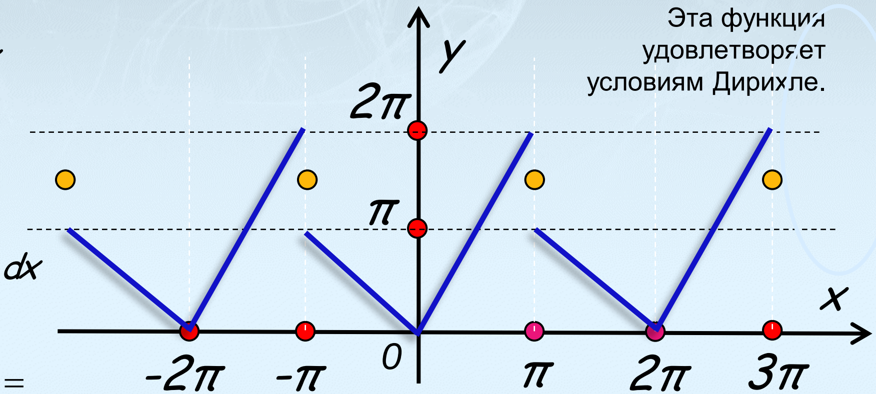
$$f(x)=\begin{cases}-x & -\pi\le x\le 0\\ 2x & 0\le x\le \pi\end{cases}$$

Решение

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}-x\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}2x\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\left.\frac{-x^2}{2}\right|_{-\pi}^{0}+\left.x^2\right|_{0}^{\pi}\right)=\frac{3\pi}{2}$$

Эта функция удовлетворяет условиям Дирихле.



$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)\,dx=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}x\cos nx\,dx+\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\cos nx\,dx$$

$$=-\frac{1}{\pi}\left.\left(\frac{x}{n}\sin nx+\frac{1}{n^2}\cos nx\right)\right|_{-\pi}^{0}+\frac{2}{\pi}\left.\left(\frac{x}{n}\sin nx+\frac{1}{n^2}\cos nx\right)\right|_{0}^{\pi}=$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n^2}+\frac{(-1)^n}{n^2}\right)+\frac{2}{\pi}\left(\frac{(-1)^n}{n^2}-\frac{1}{n^2}\right)$$

$$b_n=-\frac{1}{\pi}\left.\left(-\frac{x}{n}\cos nx+\frac{1}{n^2}\sin nx\right)\right|_{-\pi}^{0}+\frac{2}{\pi}\left.\left(-\frac{x}{n}\cos nx+\frac{1}{n^2}\sin nx\right)\right|_{0}^{\pi}$$

$$a_n=\frac{3}{\pi n^2}\left((-1)^n-1\right)\qquad b_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

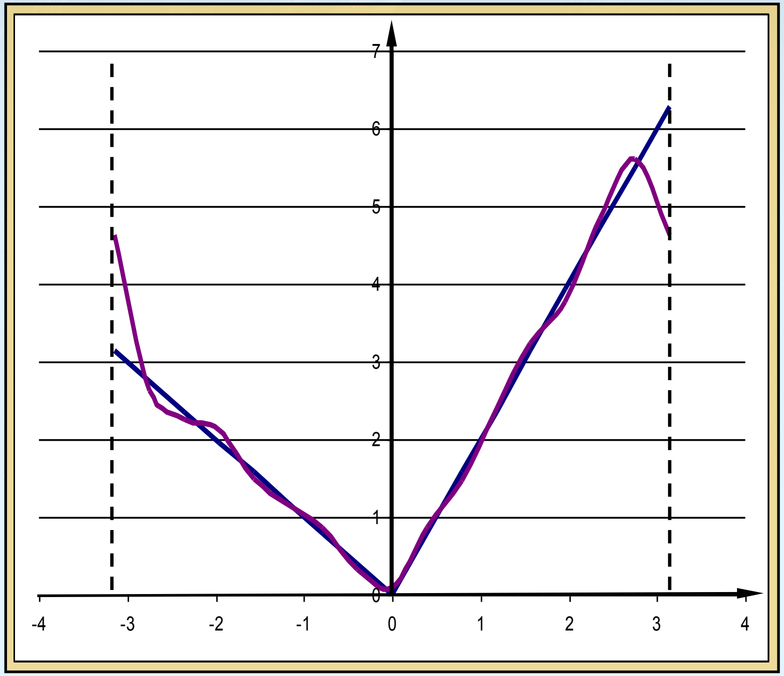
$$f(x)=\frac{3\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{\pi n^2}\left((-1)^n-1\right)\cos(nx)+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)\right)$$

$$f(x)=\frac{3\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{\pi n^2}\left((-1)^n-1\right)\cos(nx)+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)\right)$$

$$S_1=\frac{3\pi}{4}-\frac{6}{\pi}\cos x+\sin x$$

$$S_2=\frac{3\pi}{4}-\frac{6}{\pi}\cos x-\frac{2}{3\pi}\cos 3x+\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x$$

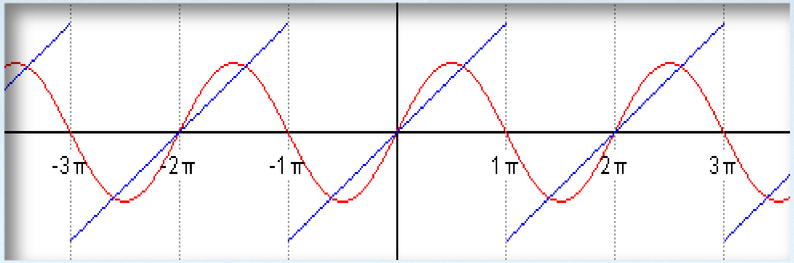
$$S_5=\frac{3\pi}{4}-\frac{6}{\pi}\left(\cos x+\frac{\cos 3x}{9}+\frac{\cos 5x}{25}+\frac{\cos 7x}{49}+\frac{\cos 9x}{81}\right)$$
$$+\left(\sin x-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\frac{\sin 4x}{4}+\frac{\sin 5x}{5}\right)$$



Разложить функцию $\frac{x}{\pi}$ в ряд Фурье на интервале $-\pi < x < \pi$.

Решение

$$a_n = 0,\ n \ge 0 \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$$



$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x}{\pi}\sin(nx)dx$$

$$f(x=\pi) = 0$$

$$b_n = -\frac{2}{\pi n}\cos(n\pi) + \frac{2}{\pi^2 n^2}\sin(n\pi) = \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n},\ n \ge 1$$

$$\frac{x}{\pi} = \frac{2}{\pi}\left(\sin(x) - \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{1}{3}\sin(3x) \pm \ldots\right)$$

$$\frac{x}{\pi} = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx),\quad x - \pi \notin 2\pi Z$$

Разложение на интервале [- *l* ; *l*] для функций произвольного периода

Пусть функция *f(x)* определенная на отрезке [- *l*; *l*], имеет период 2 *l* и удовлетворяет на этом отрезке условиям Дирихле.

Ряд Фурье будет иметь вид:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{\pi n x}{\ell} + b_n \sin\frac{\pi n x}{\ell}\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\,dx \qquad a_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{\pi n x}{\ell}\,dx \qquad b_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{\pi n x}{\ell}\,dx$$

Все свойства, имеющие место для рядов Фурье 2π – периодических функций имеют место и для рядов Фурье функций с периодом 2 *l*.

Неполные ряды – разложение по синусам и косинусам

Пусть функция *f(x)* определена на отрезке [*-l; l*], имеет период *2l* и является четной.

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx = 2\cdot\int_{0}^{l} f(x)dx \quad \text{если} \quad f(x) \text{ - четная}$$

Ряд Фурье будет иметь вид: $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{\ell}$

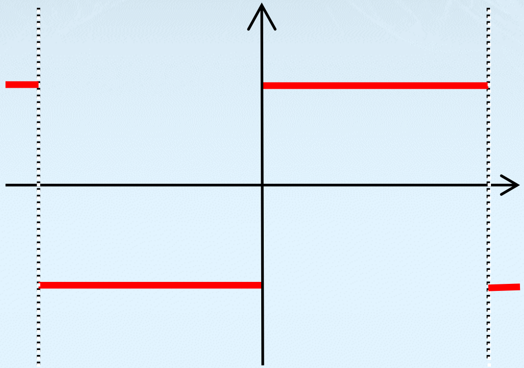
$$a_0=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\,dx \qquad a_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\cos\frac{\pi n x}{\ell}\,dx \qquad b_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{\pi n x}{\ell}\,dx=0$$

Если *f(x)* определена на отрезке [*-l; l*], имеет период *2l* и является нечетной.

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx = 0 \qquad a_0=0 \qquad a_n=0 \qquad b_n=2\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{\pi n x}{\ell}\,dx$$

Ряд Фурье будет иметь вид: $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n x}{\ell}$

$$f(x)=\begin{cases}-3, & -\pi\le x<0\\ 3, & 0\le x<\pi\end{cases}$$ определена на отрезке $[-\pi;\ \pi]$, имеет период 2π и является нечетной.



$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=0 \qquad a_0=0 \qquad a_n=0$$

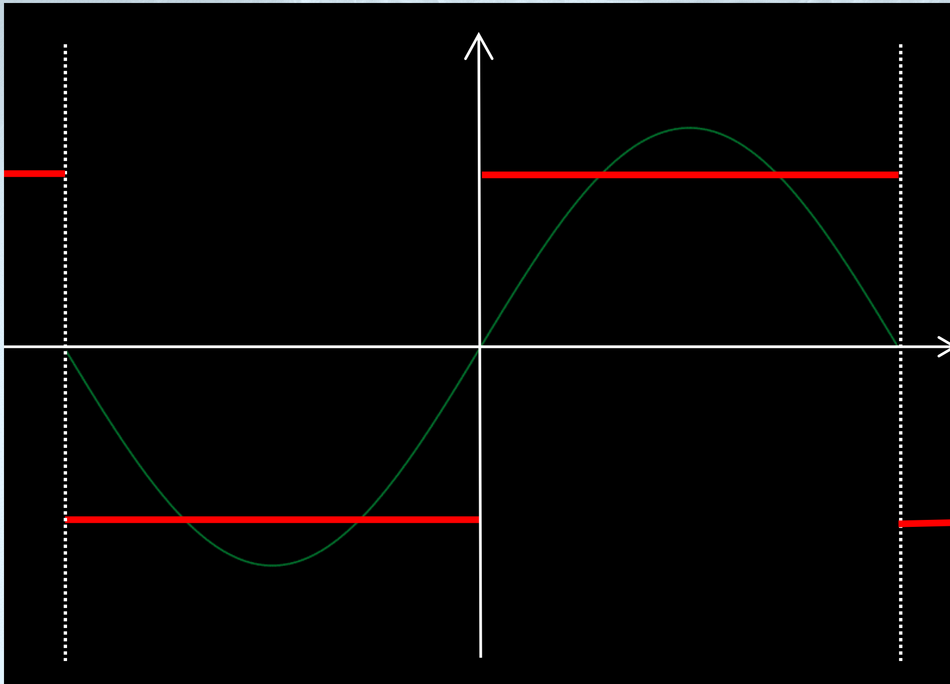
$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx \qquad f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

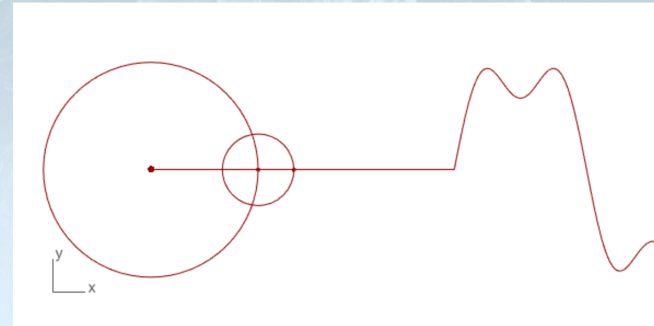
$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 3\sin nx dx=-\frac{6}{\pi n}\cos nx\Big|_0^{\pi}=\frac{6}{\pi n}(1-\cos\pi n)=\frac{6}{\pi n}\left(1-(-1)^n\right)$$

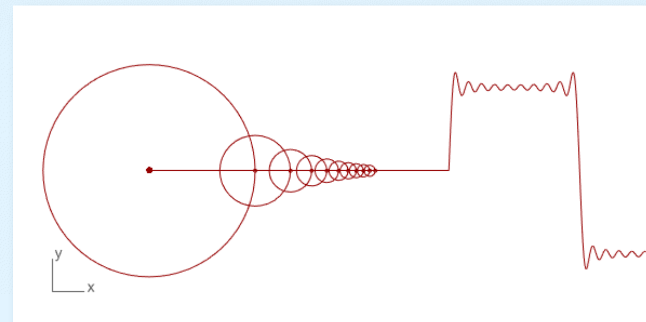
$$f(x)=\frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(1-(-1)^n\right)\sin nx \qquad f(x)=\frac{12}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$$

$$f(x)\approx S_6(x)=\frac{12}{\pi}\left(\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\frac{\sin 7x}{7}+\frac{\sin 9x}{9}+\frac{\sin 11x}{11}\right)$$

Пример







$$f(x) \approx S_6(x) = \frac{12}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \frac{\sin 9x}{9} + \frac{\sin 11x}{11}\right)$$

Непериодическая функция не может быть разложена в ряд Фурье, так как сумма ряда Фурье есть функция периодическая и, следовательно, не может быть равна *f(x)* для всех *x*.

Однако, непериодическая функция *f(x)* может быть представлена в виде ряда Фурье на любом конечном промежутке [a; b], на котором она удовлетворяет условиям Дерихле.

Для этого можно поместить начало координат в середину отрезка $[a; b]$ и построить функцию $f_1(x)$ периода $T = 2\ell = |b - a|$, такую, что $f_1(x) = f(x)$ при $-\ell \le x \le \ell$

Раскладываем функцию $f_1(x)$ в ряд Фурье.
Сумма этого ряда во всех точках отрезка $[a; b]$ (кроме точек разрыва) совпадает с функцией $f(x)$.
Вне этого интервала сумма ряда и $f(x)$ являются совершенно различными функциями.

Пусть непериодическую функцию $f(x)$ требуется разложить в ряд Фурье на отрезке $[\ 0;\ l\ ]$.

Такую функцию можно произвольным образом доопределить на $[\ -l;\ 0\ ]$. Обычно доопределение функции производят либо **четным**, либо **нечетным** образом.