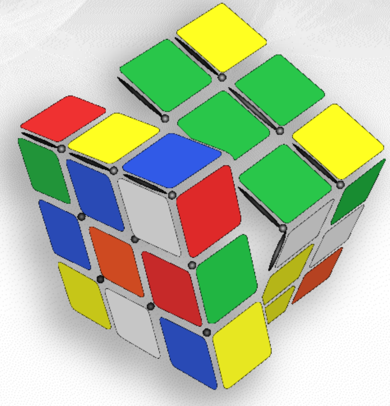
Эйлеровы графы

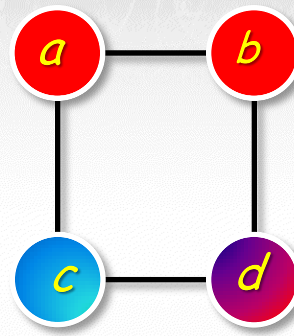


{ изоморфизм графов - подграф - планарный и плоский графы - укладка плоских графов - маршруты, связность и компоненты - метрические характеристики - Эйлеровы графы - Эйлеровы пути и циклы - Эйлеров путь в связном графе - Алгоритм Флери – нахождение эйлерова цикла }

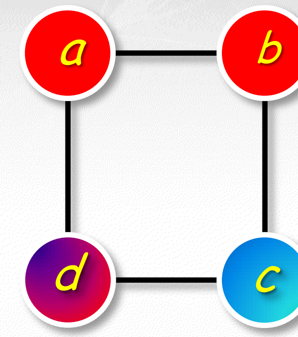
Изоморфизм графов

- Графы G_1 и G_2 называются *изоморфными*, если существует такая биекция f множества V_{G1} на множество V_{G2}, что (a,b) принадлежит E_{G1} тогда и только тогда, когда $(\ f(a), f(b)\ )$ принадлежит E_{G2}. Отображение f в этом случае называется *изоморфизмом* графа G_1 на G_2.

$x\ (V_{G1})$	a	b	c	d
$f(x)\ (V_{G2})$	a	b	d	c



$G_1 \cong G_2$

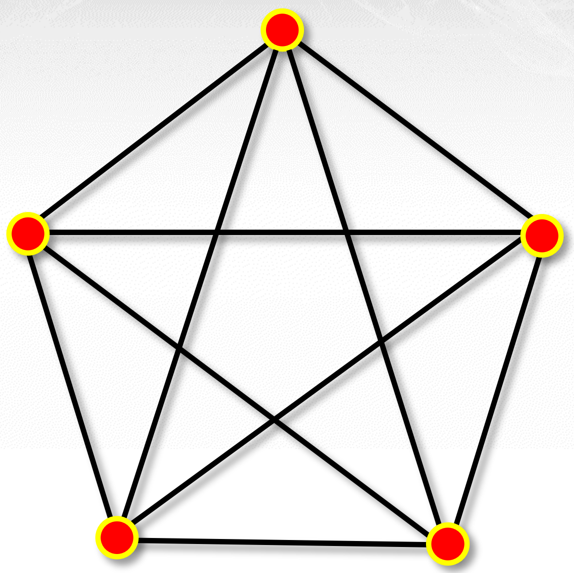


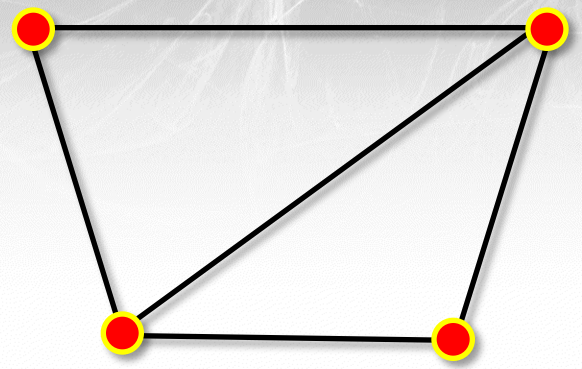
Изоморфизм - бинарное отношение на множестве графов. Очевидно, что это отношение рефлексивно, симметрично и транзитивно, то есть является отношением эквивалентности. Классы эквивалентности называются абстрактными графами. Когда говорят, что рассматриваются абстрактные графы, это означает, что изоморфные графы считаются одинаковыми. Абстрактный граф можно представлять себе как граф, у которого стерты имена (пометки) вершин, поэтому абстрактные графы иногда называют также непомеченными графами.

Подграф

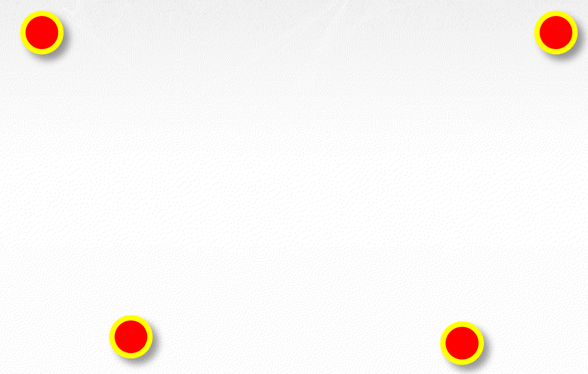
- *Подграфом графа G* называется граф, все вершины которого принадлежат $V_{(G)}$, а все рёбра принадлежат $E_{(G)}$.

G_1 – полный граф



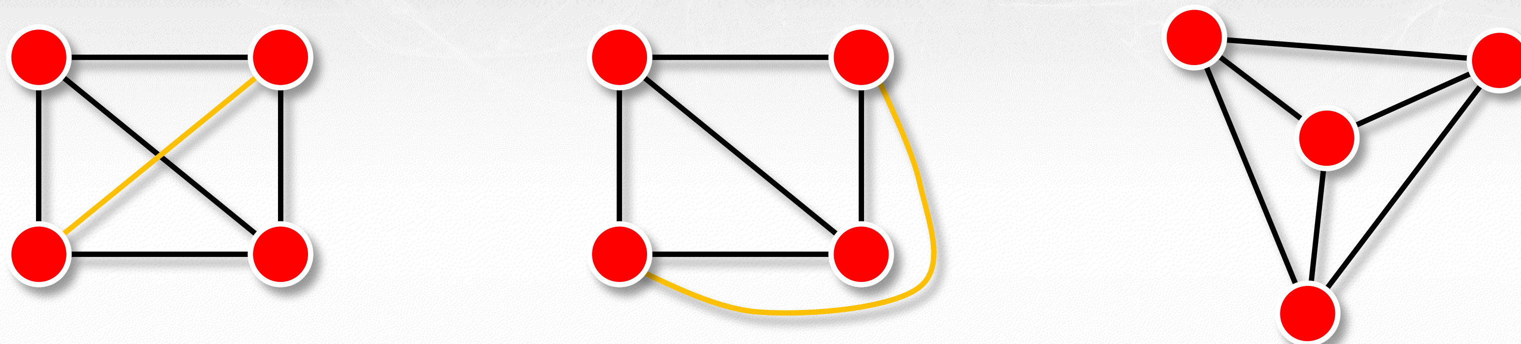


G_2 – подграф графа G_1



G_3 – подграф графов G_1, G_2
Максимально пустой подграф G_2

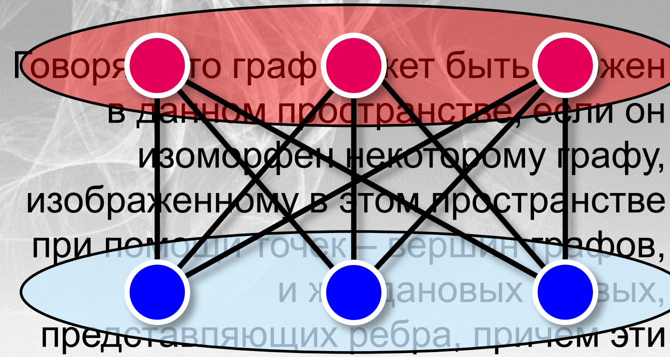
- **Плоским** называется граф, изображенный на плоскости так, что никакие его два ребра не пересекаются. **Планарный** граф *изоморфен* плоскому. Изображенные три графа – планарные, но только два из них плоские.



Жордановой кривой на плоскости называют непрерывную кривую без самопересечений.

Граф, который может быть уложен на плоскости, называется ***планарным***.

- **Двудольный граф**. Это графы, у которых множество вершин можно разбить на два множества V_1, и V_2, так что каждое ребро графа соединяет только некоторую вершину из V_1 с некоторой вершиной из V_2.



Говорят, что граф может быть уложен в данном пространстве, если он изоморфен некоторому графу, изображенному в этом пространстве при помощи точек – вершин графов, и жордановых кривых, представляющих ребра, причем эти кривые не пересекаются друг с другом. Графы K_5, $K_{3,3}$ – непланарные графы.

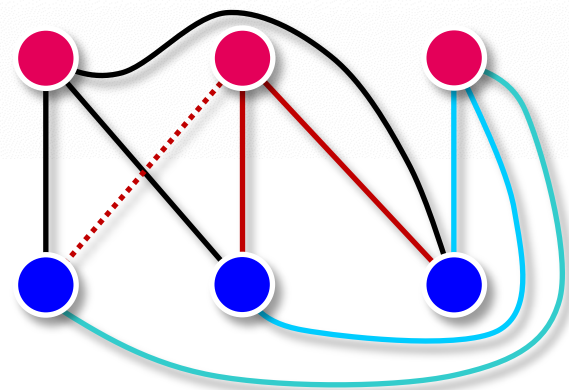
Задача о трех домах и трех колодцах, между которыми требуется провести непересекающиеся дорожки, иллюстрируется двудольным графом $K_{3,3}$. Видно, что решение невозможно, если граф будет плоским (планарным).

Дома

Дорожки

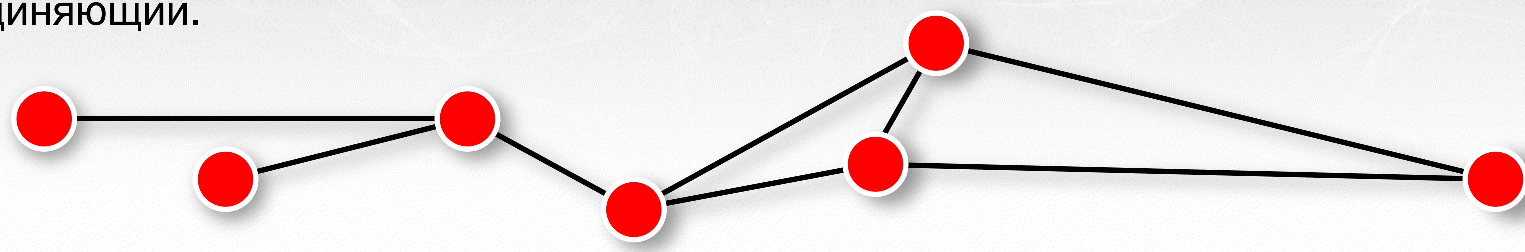
Колодцы

$K_{3,3}$

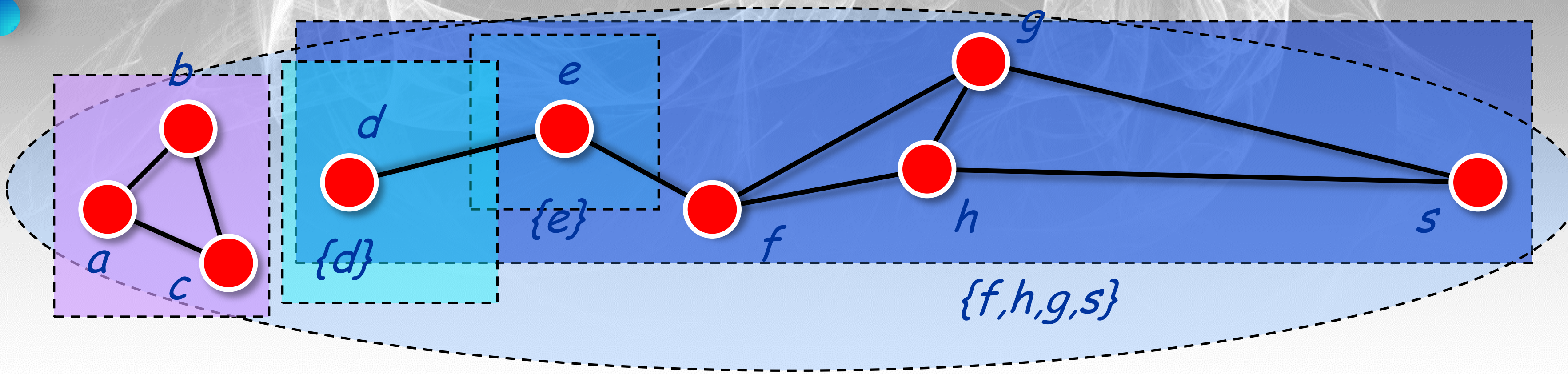


- ***Маршрутом*** называется последовательность ребер графа, такая, что два соседних ребра имеют общую вершину. Маршрут называется ***цепью*** (*путем*), если все его ребра различны и ***простой цепью*** (*простым путем*), если все вершины различны (кроме, может быть, начальной и конечной вершин).

Граф называется ***связным***, если для любых двух вершин существует путь, их соединяющий.



Для графа на множестве вершин задается *отношение соединимости*: вершина *a* соединима с вершиной *b* , если существует соединяющий их маршрут. Это отношение рефлексивно, симметрично и транзитивно, то есть является отношением эквивалентности. *Классы эквивалентности* называются *областями связности*, а порождаемые ими подграфы - *компонентами связности графа*. В связном графе имеется только одна компонента связности - весь граф. Компоненты связности можно определить как максимальные по включению связные подграфы данного графа.

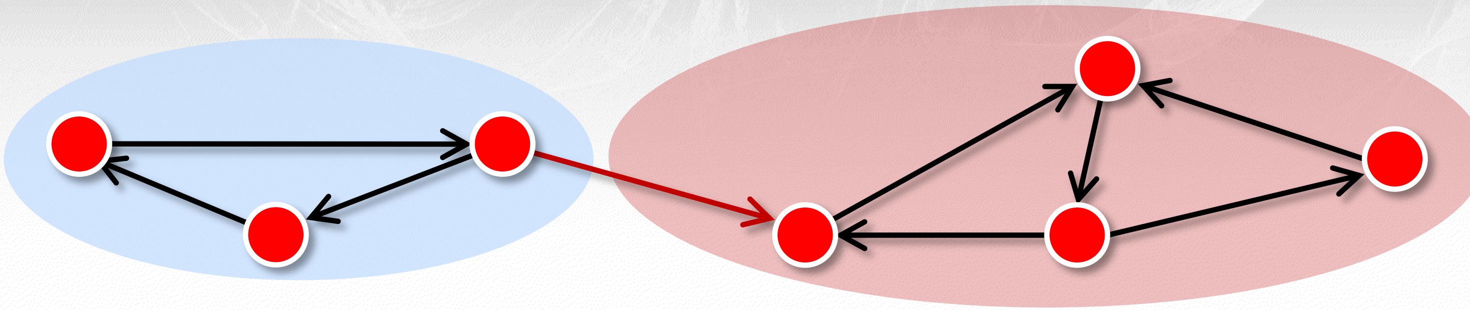


У приведенного графа имеется две области связности: *{a,b,c} {d,e,f,h,g,s}*

Вершина называется *шарниром* (точкой сочленения), если при ее удалении число компонент связности увеличивается. У приведенного графа это *e* и *f*.

Ребро, при удалении которого увеличивается число компонент связности, называется *перешейком*. У приведенного графа их два – *(d,e)* и *(e,f)*.

- Для *ориентированного* графа можно определить два типа маршрутов. *Неориентированный маршрут* (или просто маршрут) - это чередующаяся последовательность вершин и ребер, где $e_i = (x_i, x_{i+1}) = (x_{i+1}, x_i)$, и *ориентированный* (ормаршрут), где переход вдоль ребра ведется от вершины с меньшим индексом к вершине с большим индексом.



Соответственно определяются и два типа связности орграфов. Орграф называется *связным* (или *слабо связным*), если для каждой пары вершин в нем имеется соединяющий их маршрут. Он называется *сильно связным*, если для каждой упорядоченной пары вершин a, b в нем имеется ормаршрут, ведущий из a в b. Максимальные по включению подмножества вершин орграфа, порождающие сильно связные подграфы, называются его областями сильной связности, а порождаемые ими подграфы - компонентами сильной связности.

Расстоянием между двумя вершинами графа называется наименьшая длина пути, их соединяющего. Расстояние между вершинами a и b обозначается $d(a,b)$.

Если в графе нет пути, соединяющего a и b, то есть эти вершины принадлежат разным компонентам связности, то расстояние между ними считается бесконечным.

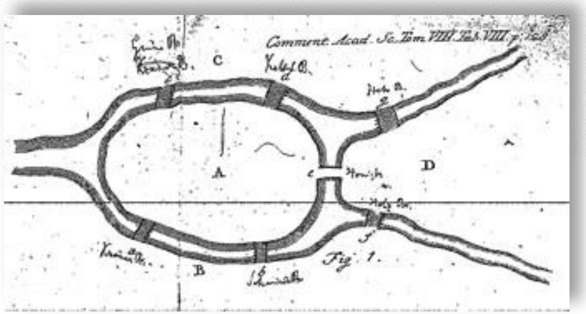
Расстояние от заданной вершины a до наиболее удаленной от нее вершины x называется эксцентриситетом вершины – $ecc(a) = max_x$ из $V_{(G)}$ $d(a,x)$. Наибольший эксцентриситет называется диаметром графа $diam(G)$, наименьший – радиусом $rad(G)$.

- Функция $d(a,b)$ обладает следующими свойствами:
  - $d(x,y) >= 0$, причем $d(x,y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$
  - $d(x,y) = d(y,x)$
  - $d(x,y) + d(y,z) >= d(x,z)$ (неравенство треугольника)

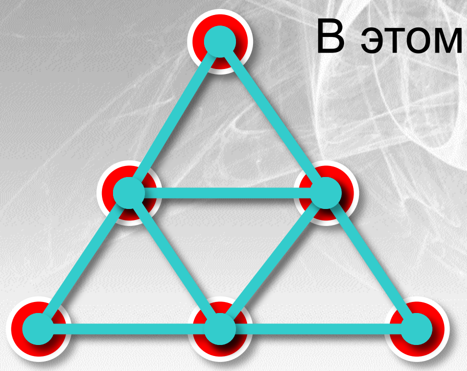
В математике функцию двух переменных, определенную на некотором множестве и удовлетворяющую вышеперечисленным условиям, называют метрикой, а множество, на котором задана метрика, - метрическим пространством. Таким образом, множество вершин любого графа можно рассматривать как метрическое пространство.

- Вернемся к работе Эйлера, в которой не только была решена задача о кенигсбергских мостах, но и сформулировано общее правило, позволяющее решить любую задачу такого рода.

В одном из писем Эйлер писал по этому поводу: *"... это решение по своему характеру, по-видимому, имеет мало отношения к математике, и мне непонятно, почему следует скорее от математика ожидать этого решения, нежели от какого-нибудь другого человека ..."*

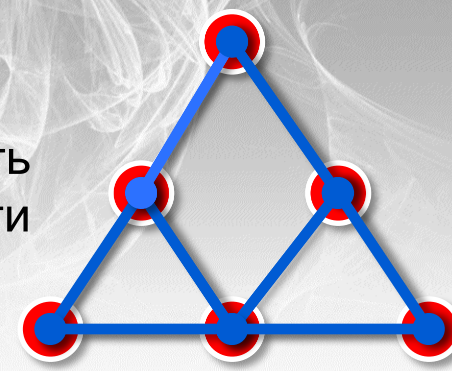


На языке теории графов задача состоит в том, чтобы определить, имеется ли в графе *путь, проходящий через все его ребра* (напомним, что путь, по определению, не может дважды проходить по одному ребру). Такой путь называется *эйлеровым путем*, а если он замкнут, то *эйлеровым циклом*.



В этом графе есть эйлеров цикл

В этом графе цикла нет, но есть эйлеровы пути



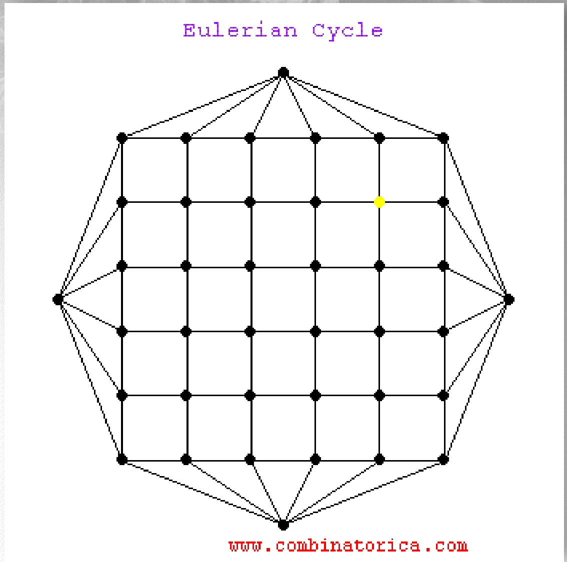
Рассмотрим условия существования эйлерова цикла в обыкновенном графе. Ясно, что в несвязном графе эйлеров цикл может существовать только в том случае, когда все его ребра принадлежат одной компоненте связности, а все остальные компоненты - просто изолированные вершины. Поэтому достаточно рассматривать связные графы.

- **Теорема** Эйлеров цикл в связном графе существует тогда и только тогда, когда в нем степени всех вершин четны.

Доказательство: *Необходимость :* при каждом прохождении цикла через какую либо вершину используются два ребра: по одному входим, по другому выходим из вершины. Таким образом у всех вершин степень четная.
Доказывается и достаточность условия.

- **Теорема**
  Эйлеров путь в связном графе существует тогда и только тогда, когда в нем имеется не более двух вершин с нечетными степенями.

- **Теорема**
  Эйлеров цикл в связном орграфе существует тогда и только тогда, когда у каждой его вершины число входящих и выходящих ребер совпадает.



Пример эйлерова цикла в связном графе

Теорема об эйлеровом цикле верна и для мультиграфов (в задаче о кенигсбергских мостах ситуация моделируется мультиграфом). Она остается верной и при наличии петель, если при подсчете степеней вершин каждую петлю считать дважды.

- Выходя из произвольной вершины идем вдоль ребер соблюдая следующие правила:
  - *стираем ребра по мере их прохождения, а также изолированные вершины, которые при этом образуются;*
  - *на каждом этапе идем по мосту только тогда, когда нет другой возможности.*