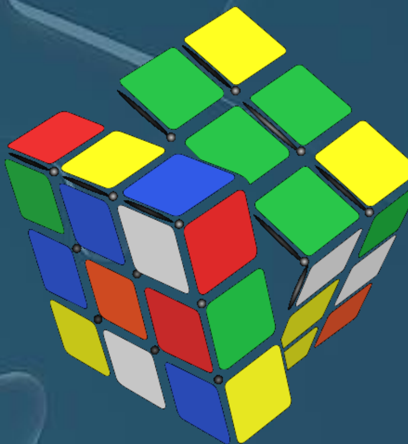
# Теория вероятностей



{ определения - случайное событие - операции над событиями – вероятность на дискретном пространстве элементарных исходов – классическое определение вероятности – пример – гипергеометрическое распределение – пример – геометрическая вероятность – пример - задача Бюффона }

# Определения

Теория вероятностей изучает закономерности, возникающие в случайных экспериментах (явлениях).

Случайным называют эксперимент, результат которого нельзя предсказать заранее. Невозможность предсказать заранее — основное, что отличает *случайное* явление от *детерминированного*.

- Событие, которое происходит при некотором осуществлении комплекса условий $k$, называется достоверным – $U\ (\Omega)$.

  Событие, которое заведомо не может произойти при некотором осуществлении комплекса условий $k$, называется невозможным – $V\ (\varnothing)$.

- Случайное событие – всякое явление природы, которое на данном этапе, при реализации комплекса условий $k$, может произойти или не произойти.

  Обозначения: используют заглавные буквы латинского алфавита $A$, $B$, $C$.

# Вероятность появления случайного события

Не все случайные явления можно изучать методами теории вероятностей, а лишь те, которые могут быть воспроизведены в одних и тех же условиях и обладают свойством статистической устойчивости: если $A$ - некоторое событие, могущее произойти или не произойти в эксперименте, то доля $m(A)/n$ числа экспериментов, в которых данное событие произошло, имеет тенденцию стабилизироваться с ростом общего числа экспериментов $n$, приближаясь к некоторому числу $P(A)$. Это число служит объективной характеристикой «степени возможности» событию $A$ произойти.

- Возможность появления случайного события $A$ при реализации комплекса условий $k$ оценивается количественной мерой – вероятностью $P(A|_k)$ или $P(A)$.

Предполагается: $P(\Omega)=1$, $P(\varnothing)=0$, $0 \le P(A) \le 1$

# Операции над событиями

Существует несколько подходов к определению вероятности – интуитивное и на математической основе.

Будем давать определения в порядке истории развития науки.

- *Пространством элементарных исходов* $\Omega$ называется множество, содержащее все возможные результаты данного случайного эксперимента, из которых в эксперименте происходит ровно один. Элементы этого множества называют *элементарными исходами* и обозначают буквой $\omega$ (с индексами или без).
- *Событиями* мы будем называть подмножества множества $\Omega$. Говорят, что в результате эксперимента произошло *событие* $A \subseteq \Omega$ , если в эксперименте произошел один из элементарных исходов, входящих в множество $A$ .

Вообще говоря, можно назвать событиями не обязательно все подмножества множества $\Omega$ , а лишь множества из некоторого набора подмножеств.

# Пример

@ *Два раза подбрасывается игральная кость. Найти пространство элементарных исходов. Найти событие $A$ : при первом подбрасывании выпало два очка;*

*$B$ : при двух подбрасываниях выпало одинаковое число очков.*

*Решение*

Задать пространство элементарных исходов — считать результатом эксперимента упорядоченную пару чисел $(i, j)$ , в которой $1 \le i, j \le 6$ $i$ – число очков, выпавших первый раз, $j$ – число очков, выпавших при втором подбрасывании кости.

$$\Omega = \{(i, j), 1 \le i, j \le 6\}$$

$$A = \{(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)\}$$

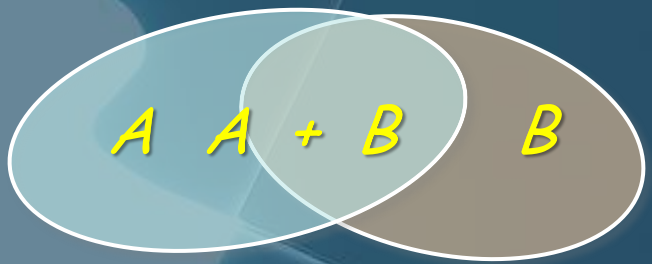
$$B = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$$

# Операции над событиями

- *Достоверным* называется событие, которое обязательно происходит в результате эксперимента, то есть единственное событие, включающее все без исключения элементарные исходы - событие $\Omega$.
- *Невозможным* называется событие которое не может произойти в результате эксперимента, то есть событие, не содержащее ни одного элементарного исхода (пустое множество - $\varnothing$) $\varnothing \in \Omega$.
- *Объединением* $A \cup B$ событий $A$ и $B$ называется событие, состоящее в том, что произошло либо $A$, либо $B$, либо оба события одновременно. На языке теории множеств $A \cup B$ есть множество, содержащее как элементарные исходы, входящие в $A$, так и элементарные исходы, входящие в $B$.

*Объединение (сумма)*

$$A \cup B \qquad A + B$$

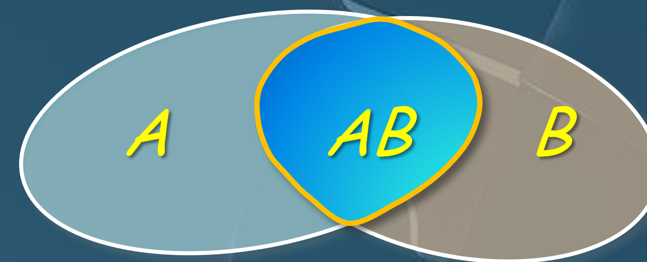


# Операции над событиями

- *Пересечением* $A \cap B$ событий $A$ и $B$ называется событие, состоящее в том, что произошли оба события $A$ и $B$ одновременно. То есть $A \cap B$ есть множество, содержащее элементарные исходы, входящие одновременно в $A$ и в $B$.

*Пересечение (умножение)*

$$A \cap B \qquad AB$$



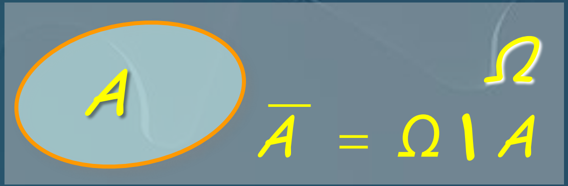

- *Дополнением* $A \setminus B$ события $A$ до $B$ называется событие, состоящее в том, что произошло событие $A$, но не произошло $B$. То есть $A \setminus B$ есть множество, содержащее элементарные исходы, входящие в $A$, но не входящие в $B$.

*Дополнение* $A \setminus B$

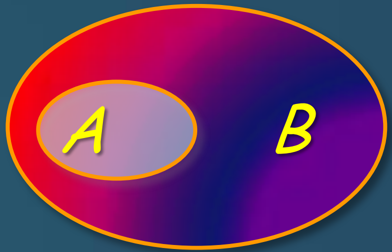
$$\setminus B \qquad A \cap \setminus B = A \setminus B$$

# Операции над событиями

- *Противоположным* ( или *дополнительным* ) к событию $A$ называется событие $\overline{A} = \Omega \setminus A$ , состоящее в том, что событие $A$ в результате эксперимента не произошло. Иначе говоря, $\overline{A}$ есть множество, содержащее элементарные исходы, не входящие в $A$ .




- События $A$ и $B$ называются *несовместными*, если $A \cap B = \varnothing$ .
- События $A_1, A_2, \ldots A_n$ называются *попарно несовместными*, если для любых $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$ , события $A_i$ и $A_j$ несовместны - $A_i \cap A_j = \varnothing$ .
- Говорят, что событие $A$ *влечет* событие $B$, и пишут $A \subseteq B$ , если всегда, как только происходит событие $A$ , происходит и событие $B$ . На языке теории множеств это означает, что любой элементарный исход, входящий в $A$ , одновременно входит и в событие $B$ .



# Вероятность на дискретном пространстве элементарных исходов

*Дискретное* пространство элементарных исходов - пространство, состоящее из конечного или счетного числа элементов: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots \omega_n, \dots\}$.

- Поставим каждому элементарному исходу $\omega_i \in \Omega$ в соответствие число $p(\omega_i) \in [0,1]$ так, что $\sum_{\omega_i} p(\omega_i) = 1$

Назовем $p(\omega_i)$ вероятностью элементарного исхода $\omega_i$.

*Вероятностью* события $A \subseteq \Omega$ называется число $P(A) = \sum_{\omega_i} p(\omega_i)$

В случае дискретного пространства элементарных исходов свойства вероятности имеют следующий вид :

$0 \le P(A) \le 1$; $P(\Omega) = 1$; $P(\varnothing) = 0$; $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;
если $A$ и $B$ несовместны, то $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$;
в общем случае $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$; если $A \subseteq B$, то $P(A) \le P(B)$.

# Классическое определение вероятности

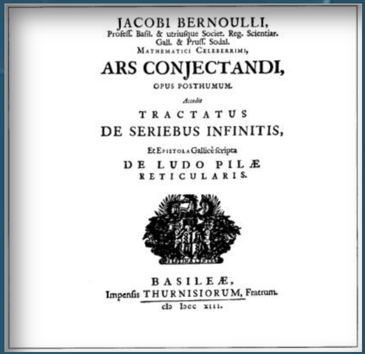
Предположим, что мы имеем дело с пространством элементарных исходов, состоящим из конечного числа ($N$) элементов: $\Omega = \{ \omega_1, \omega_2, \dots \omega_N \}$ . Предположим также, что из каких-либо соображений мы можем считать элементарные исходы равновозможными. Тогда вероятность любого из них принимается равной $1 / N$ .

- Если событие $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \omega_{i_3}, \dots, \omega_{i_k}\}$ состоит из $k$ элементарных исходов, то вероятность этого события равняется

$$P(A) = \sum_k p(\omega_{i_k}) = k\frac{1}{N} = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{k}{N}$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

где $|A|$ обозначено число элементов (мощность) конечного множества $A$


JACOBI BERNOULLI,
Profess. Basil. & utriusque Societ. Reg. Scientiar. Gall. & Pruss. Sodal.
MATHEMATICI CELEBERRIMI,
ARS CONJECTANDI,
OPUS POSTHUMUM.
Accedit
TRACTATUS
DE SERIEBUS INFINITIS,
Et EPISTOLA Gallicè scripta
DE LUDO PILÆ
RETICULARIS.
BASILEÆ,
Impensis THURNISIORUM, Fratrum.
cIↄ Iↄcc xiii.

*«Вероятность есть степень достоверности и отличается от нее как часть от целого*
(Якоб Бернулли, Ars Conjectandi, 1713 г.)

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Вероятность события $A$ равна отношению числа исходов, *благоприятствующих* событию $A$, к общему числу исходов

# Пример

@ *Чему равна вероятность того, что из десяти вытащенных из колоды карт (в колоде 52 карты) одна карта будет тузом.*

### Решение

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

*10 карт* можно выбрать $C_{52}^{10}$ числом способов: $n = C_{52}^{10}$

*1 туз* можно выбрать $4$ способами ( число мастей $4$ )

Оставшиеся карты можно выбрать $C_{48}^{9}$ числом способов.

Число исходов, благоприятствующих событию $A$ : $m = 4 \cdot C_{48}^{9}$

$$P(A) = \frac{4C_{48}^{9}}{C_{52}^{10}} \qquad P(A) = \frac{4 \cdot 48!10!42!}{9!39!52!} \qquad P(A) = 0.424$$

# Пример

@ Из урны, в которой $n_1$ белых и $n - n_1$ чёрных шаров, наудачу, без возвращения вынимают $k$ шаров, $k < n$. Термин «наудачу» означает, что появление любого набора из $k$ шаров равновозможно. Найти вероятность того, что будет выбрано ровно $k_1$ белых и $k - k_1$ чёрных шаров.

*Решение*

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Общее число исходов $|\Omega| = C_n^k$ .

Число благоприятствующих событию $A$ исходов равно произведению числа способов выбрать $k_1$ белых шаров из $n_1$ и числа способов выбрать $k - k_1$ черных шаров из $n - n_1$ : $|A| = C_{n_1}^{k_1} \cdot C_{n-n_1}^{k-k_1}$

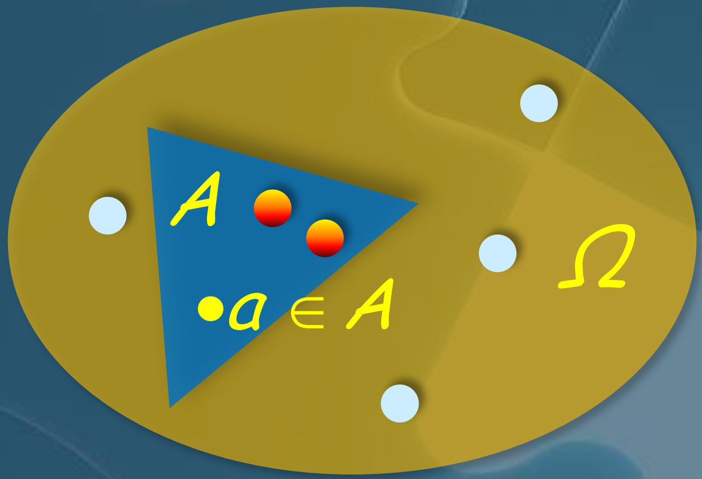
$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{C_{n_1}^{k_1} \cdot C_{n-n_1}^{k-k_1}}{C_n^k}$$

Гипергеометрическое распределение

# Геометрическая вероятность

Рассмотрим область $\Omega$ в $R^m$, (на прямой, на плоскости, в пространстве). Предположим, что «мера» $\Omega$ (длина, площадь, объем, соответственно) конечна. Пусть в этой области случайно появляется точка $a$.

Исходы случайного события - появления точки $a$ в $A \subseteq \Omega$ можно изобразить точками некоторой области $\Omega$ так, что вероятность попадания точки в любую $A \subseteq \Omega$ не зависит от формы или расположения $A$ внутри $\Omega$, а зависит лишь от меры области $\mu(A)$ (пропорциональна этой мере).

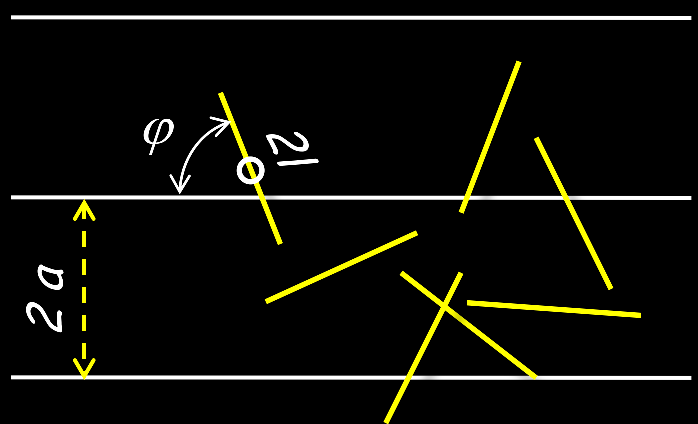



- Вероятность может быть определена по формуле:

$$P(\bullet a \in A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

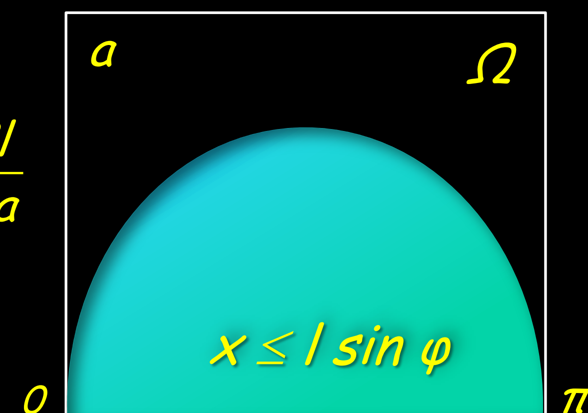
# Задача Бюффона

@ На плоскости начерчены параллельные прямые, расстояние между ними $2a$. На плоскость наудачу брошена игла длины $2l < 2a$. Какова вероятность того, что игла пересечет одну из прямых ?




Множество возможных положений иглы определяется выбором наудачу точки из прямоугольника $\Omega = [0,\pi]\times[0,a]$.

Игла пересекает ближайшую прямую, если координаты выбранной наудачу точки удовлетворяют неравенству: $x \le l\sin\varphi$.




$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{2l}{\pi a}$$

$$\mu(\Omega) = \pi a$$

$$\mu(A) = \int_0^{\pi} l\sin\varphi\, d\varphi = 2l$$

Обозначим через $x \in [0, a]$ расстояние от середины иглы до ближайшей прямой, а $\varphi \in [0, \pi]$ - угол между прямыми и иглой.