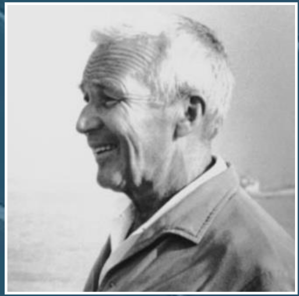
Аксиомы, теоремы и формулы теории вероятностей

{ σ-алгебра - поле случайных событий - первая группа аксиом Колмогорова - вторая группа аксиом Колмогорова - основные формулы теории вероятностей - теорема сложения вероятностей - условная вероятность и теорема умножения – примеры – независимые события – формула полной вероятности – формула Байеса }

Аксиоматика Колмогорова

Колмогоров А. Н. Основные понятия теории вероятностей. М., ГНТИ, 1936.



Колмогоров Андрей Николаевич (1903-1987)

- Пусть Ω — пространство элементарных исходов некоторого случайного эксперимента. Набор подмножеств Ω будет называться событиями. Задается вероятность - как функция, определенная только на множестве событий.
- Событиями будем называть не любые подмножества Ω, а лишь подмножества из некоторого «множества подмножеств» Ψ.
- Множество Ψ подмножеств Ω должно быть замкнуто относительно операций над событиями, то есть чтобы объединение, пересечение, дополнение событий (элементов Ψ) снова давало событие (элемент Ψ).

- Множество Ψ, состоящее из подмножеств множества Ω, называется *σ - алгеброй событий*, если выполнены следующие условия :

Первая группа аксиом Колмогорова

Аксиома 1

$\Omega \in \Psi$ (σ -алгебра событий содержит достоверное событие)

Аксиома 2

Если $A \in \Psi$, то $\overline{A} \in \Psi$ (вместе с любым событием σ -алгебра содержит противоположное событие)

Аксиома 3

Если $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \Psi$, то $\bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i} \in \Psi$ (вместе с любым конечным или счетным набором событий σ -алгебра содержит их объединение)

Первая группа аксиом Колмогорова

Этого набора аксиом достаточно для замкнутости множества Ψ относительно других операций над событиями.

- Свойство 1

$\Omega \in \Psi$ (σ -алгебра событий содержит невозможное событие)

Доказательство

A1: $\Omega \in \Psi \Rightarrow \varnothing \in \Omega \setminus \Omega = \neg\,\Omega \in \Psi$ в силу А2

- Свойство 2

При выполнении (А1),(А2) свойство (А3) эквивалентно (А4)

$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \overline{A_i} \in \Psi$ (вместе с любым конечным или счетным набором событий σ -алгебра содержит их пересечение).

- Свойство 3

Если $A, B \in \Psi$, то $A \setminus B \in \Psi$

Пример

@ Пусть Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6} - пространство элементарных исходов (например, число выпавших очков при бросании игрального кубика) .

Доказать, что следующие наборы подмножеств Ω являются σ -алгебрами :

$$\Psi = \{\Omega, \varnothing\} = \{\{1,2,3,4,5,6\}, \varnothing\}$$

$$\Psi = \{\Omega, \varnothing, \{1\}, \neg\{1\}\} = \{\{1,2,3,4,5,6\}, \varnothing, \{1\}, \{2,3,4,5,6\}\}$$

$$\Psi = \{\Omega, A, \neg A\} = \{\{1,2,3,4,5,6\}, \varnothing, A, \neg A\}$$

Вторая группа аксиом Колмогорова

- Пусть Ω - пространство элементарных исходов и Ψ - σ -алгебра его подмножеств (событий).
  Вероятностью P или *вероятностной мерой μ* на (Ω, Ψ) , называется функция $P : \Psi \to R$, удовлетворяющая аксиомам:

  Аксиома 1

  Для любого события $A \in \Psi$ его вероятностная мера неотрицательна: $P(A) \geq 0$

  Аксиома 2 (аксиома сложения вероятностей)

  Для любого счетного набора попарно непересекающихся событий $A_1, A_2 \ldots \in \Psi$ вероятностная мера их объединения равна сумме их мер:

  $$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

  Аксиома 3

  Вероятностная мера $\mu: \Psi \to R$ называется *нормированной*, если $\mu(\Omega) = 1$.
  Вероятность достоверного события $P(\Omega) = 1$.

Основные формулы теории вероятностей

- Тройка (Ω, Ψ, P), в которой Ω - пространство элементарных исходов, Ψ - σ -алгебра его подмножеств и P - вероятностная мера на Ψ, называется *вероятностным пространством* .

Свойства и основные соотношения для вероятности:

- Вероятность невозможного события равна нулю: $P(\varnothing) = 0$

Доказательство

$\Omega = \Omega + \varnothing \quad \Omega \cap \varnothing = \varnothing \quad \Rightarrow$ по аксиоме 2 второй группы $\Rightarrow$

$P(\Omega) = P(\Omega) + P(\varnothing) \Rightarrow$ используя аксиому 3 второй группы

$\Rightarrow \quad P(\varnothing) = 0$

$\square$

Основные формулы теории вероятностей

- Вероятность противоположного случайного события определяется как :

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Доказательство

$A + \bar{A} = \Omega \quad \Rightarrow$ по аксиомам 2,3 второй группы $\Rightarrow$

$$P(A + \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = 1 \quad \Rightarrow \quad P(\bar{A}) = 1 - P(A) \qquad \square$$

- Вероятность всякого события заключена между нулем и единицей

$$0 \le P(\bar{A}) \le 1$$

Доказательство

По аксиоме 1 второй группы $P(A) \ge 0 \quad \Rightarrow \quad P(\bar{A}) = 1 - P(A) \quad \Rightarrow$

$$P(A) \ge 0 \quad P(\bar{A}) \ge 0 \quad \Rightarrow 1 - P(\bar{A}) \le 1 \quad \Rightarrow \quad P(A) \le 1 \quad \Rightarrow$$

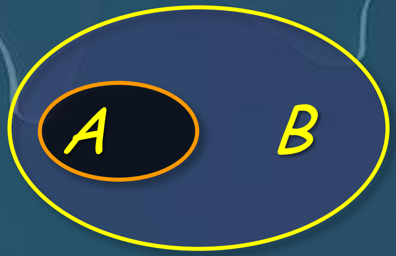
$$0 \le P(\bar{A}) \le 1 \qquad \square$$

Основные формулы теории вероятностей

- Если событие A влечет за собой событие B $(A \subseteq B)$, то : $P(A) \le P(B)$

$A \subseteq B$ - на языке теории множеств это означает, что любой элементарный исход, входящий в A , является частью множества B .

Доказательство



$$B = A + (B \setminus A) \Rightarrow$$

так как $A \cap (B \setminus A) = \varnothing$ то по аксиоме 2 второй группы $\Rightarrow$

$$P(B) = P(A) + P(B \setminus A) \Rightarrow P(A) \le P(B)$$

□

Основные формулы теории вероятностей

- События A и B равносильны $(A \equiv B)$, если A влечет за собой B и наоборот: $A \subseteq B \mid B \subseteq A$

Доказательство

$$A = B \Rightarrow P(A) = P(B)$$

$$\left.\begin{array}{l} A \subseteq B \Rightarrow P(A) \le P(B) \\ B \subseteq A \Rightarrow P(B) \le P(A) \end{array}\right\} A \equiv B \qquad \square$$

Пример

@ *Из колоды (52 карты) вынули 10 карт. Найти вероятность того, что выбран хотя бы один туз.*

Решение

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Событие A : тузов в выборке нет

Событие B : есть хотя бы один туз $B = \overline{A}$

10 карт можно выбрать $n = C_{52}^{10}$ числом способов.

Число выборок без тузов: $m = C_{48}^{10}$.

$$P(A) = \frac{C_{48}^{10}}{C_{52}^{10}} \quad P(A) = \frac{48!42!}{38!52!} = \frac{42 \cdot 41 \cdot 40 \cdot 39}{49 \cdot 50 \cdot 51 \cdot 52} = 0.413$$

$$P(B) = P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.413 = 0.587$$

Теорема сложения вероятностей

- Вероятность суммы событий A и B, находится по формуле:

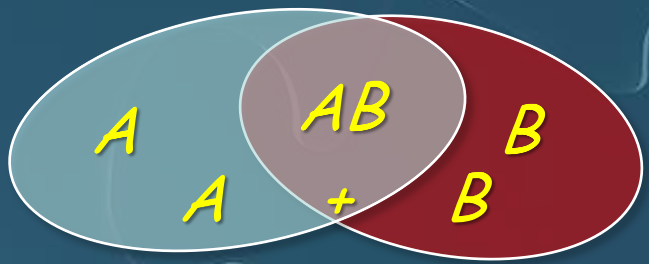
$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

Доказательство

$$A \cup B \qquad A+B$$

$$\begin{cases} A \cup B = A \cup (B \setminus AB) \\ P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus AB) \end{cases}$$

$$\begin{cases} B = (B \setminus AB) \cup AB \\ P(B) = P(B \setminus AB) + P(AB) \end{cases}$$



$$A \cap B \qquad AB$$

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB) \qquad \square$$

Теорема сложения вероятностей

- Вероятность суммы событий A_1, A_2, …., A_n, находится по формуле:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots . \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) +$$

$$+ \sum_{i<j<m} P(A_i \cap A_j \cap A_m) - \ldots + (-1)^{n-1} P(A_i \cap \ldots . \cap A_n)$$

Условная вероятность и теорема умножения

- *Условной вероятностью* события A, при условии, что произошло событие B, называется число

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad P(B) \neq 0$$

Теорема умножения

- $P(A \cap B) = P(B)\,P(A|B) = P(A)\,P(B|A)$, если соответствующие условные вероятности определены (то есть если $P(B) > 0$, $P(A) > 0$).

  $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)\,P(A_2|A_1)\,P(A_3|A_1 \cap A_2) \ldots P(A_n|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})$ если соответствующие условные вероятности определены.

- События A и B называются *независимыми*, если $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$.

Пример

@ *Кубик подбрасывается один раз. Известно, что выпало более трех очков. Какова при этом вероятность того, что выпало четное число очков?*

Решение

Пространство элементарных исходов : “выпало более трех очков”

$B = \{4, 5, 6\}$

Событие : “выпало четное число очков” $A|B = \{4, 6\}$

$$P(A|B) = \frac{|A|B|}{|B|} = \frac{2}{3}$$

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $B = \{4, 5, 6\}$

$A|B = \{4, 6\}$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}$$

Независимые события и теорема умножения

- События A и B называются *независимыми*, если $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Если события A и B несовместны, то они независимы, если и только если $P(A) = 0$ или $P(B) = 0$.

Если $P(B) > 0$, то события A и B независимы $P(A|B) = P(A)$.

Если $P(A) > 0$, то события A и B независимы $P(B|A) = P(B)$.

Если события A и B независимы, то независимы события: $A\bar{B}$, $\bar{A}B$, $\bar{A}\bar{B}$

- События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются *независимыми* в совокупности, если для любого набора $1 \le i_1, i_2 \ldots i_k \le n$

$$P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdots P(A_{i_k})$$

Если события $A_1, A_2 \ldots A_n$ независимы в совокупности, то они попарно независимы, то есть любые два события A_i, A_j независимы..

Обратное неверно.

Формула полной вероятности

- *Полной группой событий* или разбиением пространства Ω называют набор попарно несовместных событий $H_1, H_2 \ldots,$ таких, что $P(H_i) > 0$ для всех i и $\bigcup_{i=1}^{n} H_i = \Omega$.

  События $H_1, H_2 \ldots$, образующие полную группу событий, часто называют *гипотезами*. При подходящем выборе гипотез для произвольного события A могут быть сравнительно просто вычислены $P(A \mid H_i)$ (вероятность событию A произойти при выполнении «гипотезы» H_i) и собственно $P(H_i)$ (вероятность выполнения «гипотезы» H_i).

$$H_i \cap H_j = \varnothing, \quad i \neq j$$

Формула полной вероятности

- Пусть $H_1, H_2, \ldots$ - полная группа событий. Тогда вероятность любого события A может быть вычислена по формуле:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i)$$

Доказательство

По условию: $H_i \cap H_j = \varnothing, \quad i \neq j \qquad A = AH_1 \cup AH_2 \cup AH_3 \ldots.$

По аксиоме сложения : $P(A) = P(AH_1 + AH_2 + \ldots + AH_n) = \sum_{i=1}^{n} P(AH_i)$

По теореме умножения: $P(AH_i) = P(H_i)P(A|H_i)$

Тогда $$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i)$$

$\square$

Пример

@ *Имеется три партии деталей. Процент годных составляет соответственно 89 %, 92% и 97% . Общее количество деталей в партиях относится как 1:2:3. Определить вероятность случайного выбора непригодной детали из всех трех партий .*

Решение

H_1, H_2, H_3 события, заключающиеся в том, что деталь относится к первой, второй или третьей партии.

$H_1 + H_2 + H_3 = \Omega \qquad P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) = P(\Omega) = 1$

Общее количество деталей в партиях относится как *1:2:3*

Следовательно: $P(H_1) = \frac{1}{6} \qquad P(H_2) = \frac{1}{3} \qquad P(H_3) = \frac{1}{2}$

Условные вероятности: $P(A|H_1) = 0.11 \qquad P(A|H_2) = 0.08 \qquad P(A|H_3) = 0.03$

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + P(H_3)P(A|H_3)$$

$$P(A) = \frac{1}{6}0.11 + \frac{1}{3}0.08 + \frac{1}{2}0.03 = 0.06$$

@ *В урну, содержащую n шаров, опущен белый шар, после чего наудачу извлечен один шар (событие A). Найти вероятность того, что этот шар белый. Все предположения о первоначальном составе шаров в урне равновозможные.*

Решение

Выдвигаем гипотезы $H_1, H_2, \ldots. H_{n+1}$. H_1 – "нет белых шаров", H_2 – "один белый шар", H_3 – "два белых шара", ... , H_{n+1} – " в урне n белых шаров".

Вероятности гипотез: $P(H_1) = P(H_2) = \ldots = P(H_{n+1}) = 1/(n+1)$.

Опущен белый шар !

Условные вероятности: $P(A|H_1) = \dfrac{1}{n+1}$, $P(A|H_2) = \dfrac{2}{n+1}$, ... , $P(A|H_n) = \dfrac{n}{n+1}$, $P(A|H_{n+1}) = \dfrac{n+1}{n+1}$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n+1} P(H_i)P(A|H_i) =$$

************************************** Сумма арифметической прогрессии

$$= \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{2}{n+1} + \ldots + \frac{n}{n+1} + \frac{n+1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2(n+1)}\right) = \frac{n+2}{2(n+1)}$$

Апостериорная вероятность. Формула Байеса.

Важное значение в теории вероятностей имеет формула Байеса.

- Формула Байеса $P(H_k|A) = \dfrac{P(H_k)P(A|H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|H_i)P(H_i)}$

На основании коммутативности операции пересечения множеств $A \cap H = H \cap A$ можно записать: $P(A \cap H) = P(H \cap A)$ или

$$P(A)P(H|A) = P(H)P(A|H)$$

Это соотношение справедливо, если H есть также некоторое событие H_k из полной группы событий $H_1, H_2, \dots$.

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{P(A)} \quad \square$$

Пример

@ *Два стрелка выстрелили по одной мишени. Вероятность попадания в мишень первым стрелком – 1.0 , вторым – 0.004. После выстрела в мишени обнаружена пробоина. Какова вероятность, что мишень поражена первым стрелком (вторым стрелком) ?*

Решение

A – событие "поражение мишени".

H_1 - выбор первого стрелка $P(H_1) = 0.5$

H_2 - выбор второго стрелка $P(H_2) = 0.5$

Условные вероятности: $P(A|H_1) = 1$ $P(A|H_2) = 0.004$

$$P(H_1|A) = \frac{0.5 \cdot 1.0}{0.5 \cdot 1.0 + 0.5 \cdot 0.004} = \frac{1}{1.004} = 0{,}996016 \qquad P(H_2|A) = 0{,}003984$$

Апостериорная вероятность - a'posteriori - «после опыта»