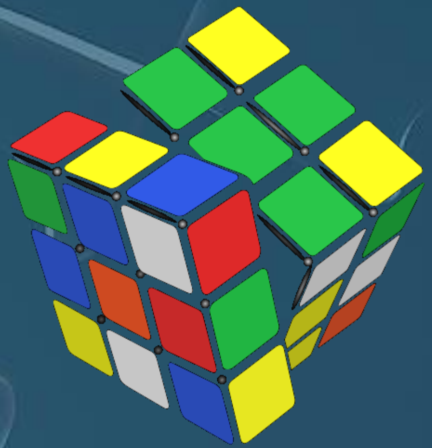
Виды распределений случайных величин



{ схема независимых испытаний - пример – формула Бернулли - биномиальный закон распределения - геометрическое распределение – теорема Муавра-Лапласа – интегральная теорема Муавра-Лапласа - распределение Пуассона – нормальное распределение }

Биномиальное распределение

- *Схемой Бернулли* называется последовательность независимых испытаний, в каждом из которых возможны лишь два исхода - «успех» и «неудача», при этом «успех» в одном испытании происходит с вероятность p, «неудача» - с вероятностью $q = 1 - p$.

Рассмотрим серию испытаний E, где событие A происходит ровно m раз.

$$E = A_1 A_2 \cdots A_m \overline{A}_{m+1} \overline{A}_{m+2} \cdots \overline{A}_n \Rightarrow P(E) = P(A_1 A_2 \cdot\cdot A_m \overline{A}_{m+1} \overline{A}_{m+2} \cdot\cdot \overline{A}_n)$$

$$\Rightarrow P(E) = p^m q^{n-m}$$

Вероятность появления событий A также равное m раз, но в другом порядке, будет той же самой. Число таких комбинаций устанавливается как число сочетаний из n элементов по k.

$$(X = m) = \bigcup_{i=1}^{m} E \Rightarrow P_n(X = m) = \sum_{1}^{m} P(E) = C_n^m p^m q^{n-m}$$

- $P_n(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad m = 1, 2, \ldots, n$ Формула Бернулли

Биномиальное распределение

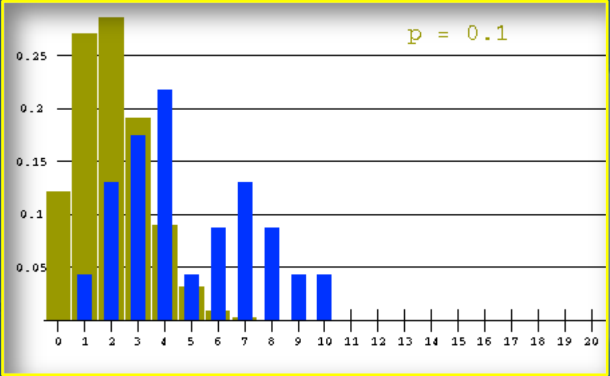
X	0	1	....	m		n
P_i	q^n	npq^{n-1}	....	$C_n^m p^m q^{n-m}$		p^n

- Набор чисел $P_n(x = m)$ называется *биноминальным распределением вероятностей* и обозначается B_{np} или $B(n,p)$.

$$f(x;n;p) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$\sum_{m=0}^{n} P_n(X = m) = 1 = \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m} = (p+q)^n = 1$$

Условие нормировки



$B(20, p)$

$n = 20$

$0.1 \le p \le 0.3$

Синим цветом выделена гистограмма с результатами эксперимента: наиболее близкое распределение пишущих левой рукой в группе студентов ($M = 4.87$, $P = 0.243$)

Пример

@ *Определить вероятность того, что из запланированных запусков десяти ракет успешными будут не менее девяти, если вероятность успешного запуска для каждой ракеты равна 0.95 .*

Решение

A – событие “успешных запусков более или равно девяти”

$$A = A_9 + A_{10}$$

A_9 - успешно запущено девять ракет.

A_{10} - успешно запущено десять ракет.

$$f(9;10;0.95) = \frac{10!}{9!(1)!} 0.95^9 0.05 = 0.315$$

$$f(10;10;0.95) = \frac{10!}{10!(0)!} 0.95^{10} = 0.599$$

$$P(A) = f(10;10;0.95) + f(10;10;0.95) = 0.914$$

Геометрическое распределение

Рассмотрим схему Бернулли с вероятностью успеха p в одном испытании. Испытания проводятся до появления первого успеха. Введем величину τ, равную *номеру первого успешного испытания*.

Вероятность того, что первый успех произойдет в испытании с номером k, равна

$$P(\tau = k) = pq^{k-1}$$

- Набор чисел $\{p\, q^{k-1}\}$ называется *геометрическим распределением вероятностей* и обозначается G_p или $G(p)$

X	1	2	....	k		n
P_i	p	pq	....	pq^{k-1}		pg^{n-1}

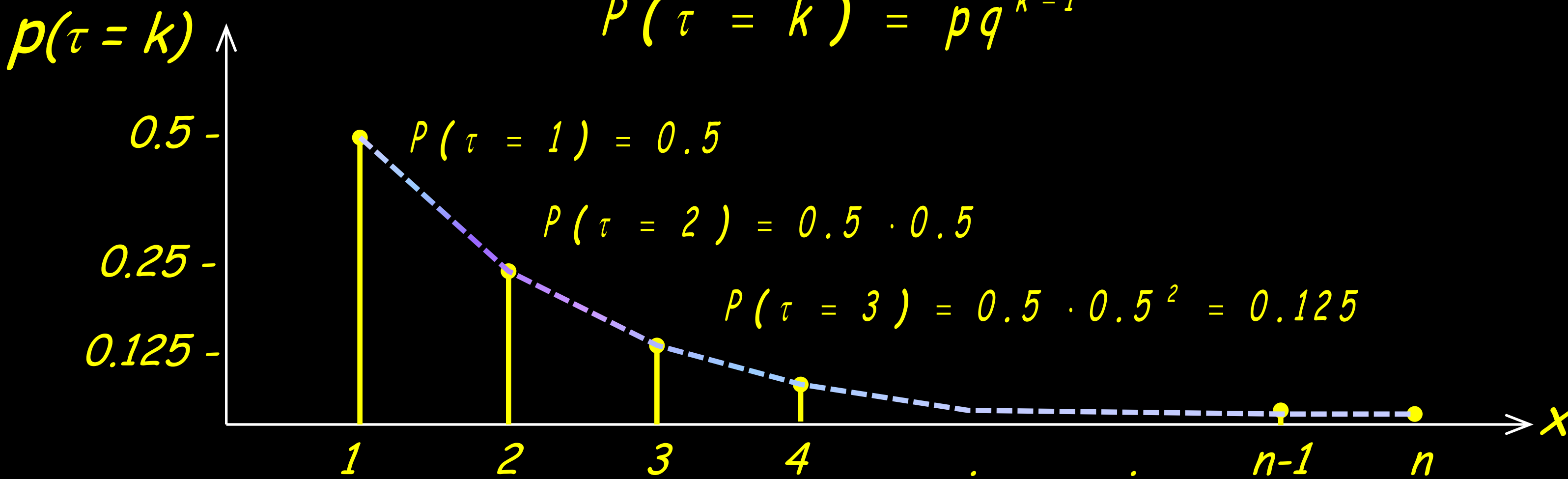
Для произвольных $n, k \geq 0$ $P(\tau > n + k \mid \tau > n) = P(\tau > k)$

Вероятность работающему устройству проработать еще сколько-то часов не зависит от того момента, когда мы начали отсчет времени, или от того, сколько уже работает устройство.

@ *Охотник, имеющий n патронов стреляет в цель до первого поражения (или пока не израсходует их все). Число израсходованных патронов – случайная величина X с n возможными значениями. Построить распределение вероятности X при вероятности попадания при каждом выстреле $p = 0.5$.*

Решение

$$P(\tau = k) = pq^{k-1}$$



Локальная теорема Муавра-Лапласа

Вычислить вероятность того, что произойдет сорок успехов в 10000 испытаний схемы Бернулли с вероятностью успеха 0.005.

$$P_{10000}(x = 40) = C_{10000}^{40} 0.005^{40} 0.955^{9960} = \frac{10000!}{40! \cdot 9960!} 0.005^{40} 0.955^{9960} = ??!! \quad \Rightarrow$$

n - достаточно велико, p - мало --- вычисления трудоемки ...

Предположим: $m \to \infty, n \to \infty$ и x_n являются ограниченными.

Пусть $x_n = \dfrac{m - np}{\sqrt{npq}}$ Тогда $\sqrt{npq} P_n(m) \approx \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x_n^2}{2}}$ $\quad P_n(m) \underset{x \to x_n}{\to} \dfrac{1}{\sqrt{npq}\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$

- $P_n(x = m) \approx \dfrac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x_m)$

Функция Лапласа $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{50 \cdot 0.995}} \varphi\left(\frac{-10}{\sqrt{50 \cdot 0.995}}\right) = \frac{1}{7} \varphi(1.42857) = 0.0206$$

Интегральная теорема Муавра-Лапласа

В продукции завода брак составляет 15%. Изделия отправляются потребителям в коробках по 100 штук. Найти вероятности событий: A –число бракованных изделий в коробке не превосходит 20 .

$$p(x \le 20) = p_{100}(0) + p_{100}(1) + \dots + p_{100}(20) = \sum_{k=0}^{20} \frac{100!}{k!\,(100-k)!} 0.15^{k} 0.85^{100-k} = ??!! \Rightarrow$$

n достаточно велико, вычисления *трудоемки, использование локальной теоремы эффекта не даст – при суммировании накопятся большие ошибки ...*

Если n велико и p отлично от 0 или 1

- $$P_n(m_1 \le m \le m_2) \approx \Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right) \qquad x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} \qquad x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$$

$$P_n(x_1 \le x \le x_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \qquad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Интегральная функция Лапласа

$$P_{100}(0;20) \approx \Phi\left(\frac{20-15}{\sqrt{12.75}}\right) - \Phi\left(\frac{-15}{\sqrt{12.75}}\right) = \Phi(1.4) + \Phi(4.2) = 0.919$$

Закон Пуассона

- Пусть $n \to \infty$, $p \to 0$ так, что $np \to \lambda > 0$. Тогда для любого $k \geq 0$ вероятность получить k успехов в n испытаниях схемы Бернулли с вероятностью успеха p_n стремится к величине

$$P_n(x=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \xrightarrow[n\to\infty,\ p_n \to 0]{np\to\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$\lambda_n = np \to \lambda > 0 \qquad C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} = C_n^k \frac{\lambda_n^k}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda_n}{n^k}\right)^{n-k} =$$

$$= \underbrace{\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k}}_{\to 1} \frac{\lambda_n^k}{k!} \underbrace{\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^n}_{e^{-\lambda}} \underbrace{\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{-k}}_{\to 1}$$

- $$P_n(x=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$\square$

Пример

@ Вычислить приближенно вероятность того, что произойдет не менее 10 успехов в 1000 испытаний схемы Бернулли с вероятностью успеха 0.003.

Решение

$$\sum_{k=10}^{1000} C_{1000}^{k} 0.003^{k} 0.997^{1000-k} = 1 - \sum_{k=0}^{9} C_{1000}^{k} 0.003^{k} 0.997^{1000-k} =$$

$$\lambda = np = 1000 \cdot 0.003 = 3$$

$$\approx 1 - \sum_{k=0}^{9} \frac{3^k}{k!} e^{-3} = 0.001$$

$$\left| \sum_{k=10}^{1000} C_{1000}^{k} 0.003^{k} 0.997^{1000-k} - \sum_{k=10} \frac{3^k}{k!} e^{-3} \right| \le np^2 = 0.009$$

Нормальный закон распределения

- Нормальное распределение СВ $X \sim N(m,\sigma)$ с параметрами m и σ

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}dt \Rightarrow \left\langle \begin{matrix} y=\dfrac{t-m}{\sigma} \\ dy=\dfrac{dt}{\sigma} \end{matrix} \right\rangle \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}} e^{-\frac{y^2}{2}}dy \Rightarrow \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)+\Phi(\infty)$$

$$P(a\le x\le b)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{a-m}{\sigma}}^{\frac{b-m}{\sigma}} e^{-\frac{y^2}{2}}dy \Rightarrow \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)$$

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

Интегральная функция Лапласа

Интеграл вероятностей

- $$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

$$F(x)=0.5+\Phi(x) \quad F(-\infty)=0$$

$$F(\infty)=1$$