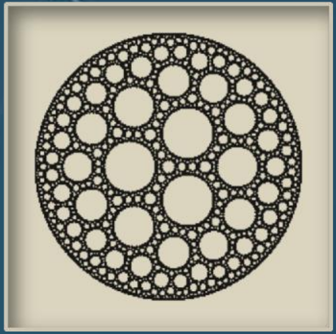
ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

УМНОЖЕНИЕ ВЕКТОРОВ



{ скалярное произведение двух векторов – векторное произведение двух векторов – произведение трех векторов - примеры }

Скалярное произведение двух векторов

- *Скалярным произведением двух векторов* называется произведение их модулей на косинус угла между ними

$$A = \vec{F} \cdot \vec{s} = \left|\text{Пр}_s \vec{F}\right| \left|\vec{s}\right| = \left|\vec{F}\right| \left|\vec{s}\right| \cos\varphi$$

Работа силы

Обозначения: $\vec{a}\vec{b}$ $\quad \vec{a} \cdot \vec{b}$ $\quad (\vec{a}, \vec{b})$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \left|\vec{b}\right| \cos\varphi = a\, b \cos\varphi$$

- Равенство скалярного произведения нулю

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Leftrightarrow a\,b\cos\varphi=0 \Leftrightarrow a=0 \vee b=0 \vee \cos\varphi=0 \Leftrightarrow$$

$$\vec{a}=\vec{0} \vee \vec{b}=\vec{0} \vee \varphi=\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}\perp\vec{b}$$

Условие перпендикулярности двух векторов : $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

1) коммутативный закон $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

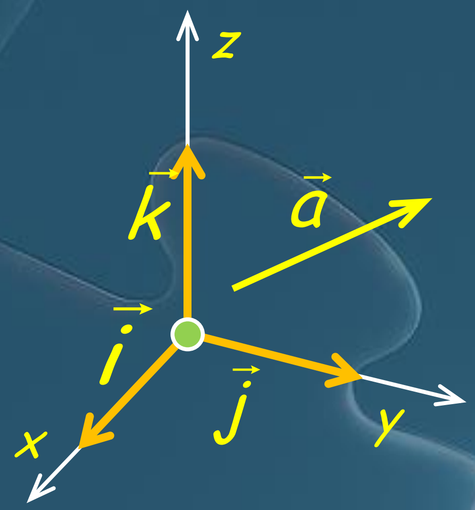
2) дистрибутивный закон $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

3) ассоциативный закон (относительно скалярных множителей)

$$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

Скалярное произведение координатных ортов

- Скалярный квадрат $\vec{a}^{\,2} = \vec{a} \cdot \vec{a} = a^2 \qquad a = \sqrt{a_x^{\,2} + a_y^{\,2} + a_z^{\,2}}$



$$\begin{pmatrix} \vec{i}^{\,2} & \vec{i} \cdot \vec{j} & \vec{i} \cdot \vec{k} \\ \vec{j} \cdot \vec{i} & \vec{j}^{\,2} & \vec{j} \cdot \vec{k} \\ \vec{k} \cdot \vec{i} & \vec{k} \cdot \vec{j} & \vec{k}^{\,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

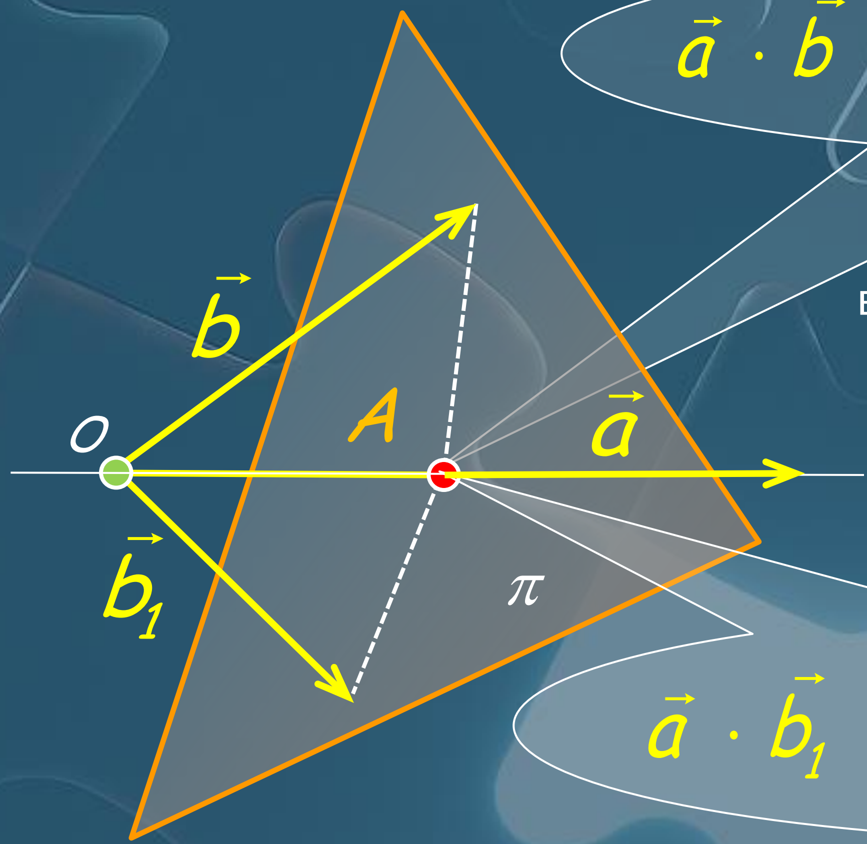
Скалярное произведение в координатной форме

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \cdot (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k})$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений одноименных их проекций

Неопределенность действия, обратного скалярному умножению



$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot \text{Пр}_a\vec{b} = a(OA)$$

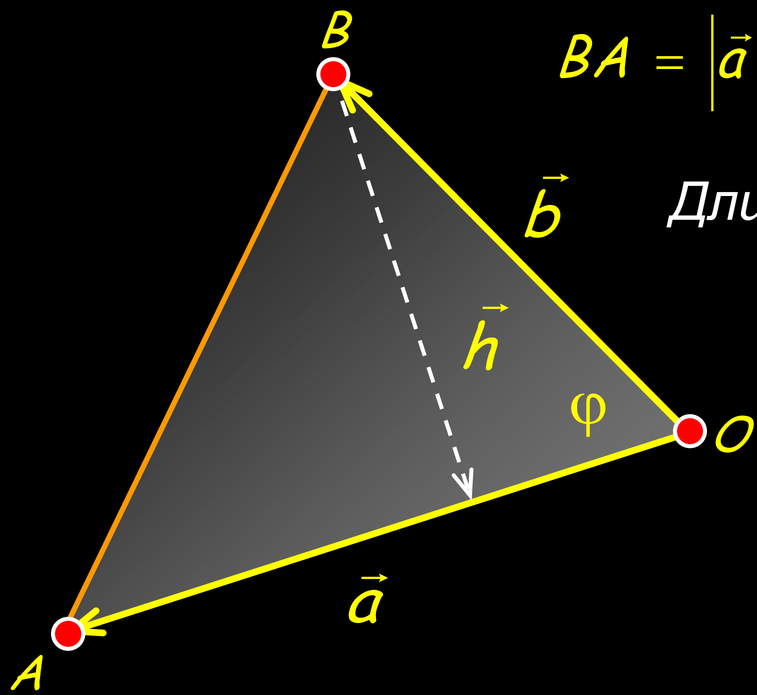
Существует бесчисленное множество векторов, которые при умножении на данный множитель будут давать заданное скалярное произведение.

Однозначно определить операцию деления скаляра на вектор нельзя.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}_1 = \vec{a}\cdot \text{Пр}_a\vec{b}_1 = a(OA)$$

Пример

@ Вывести некоторые соотношения для треугольника OAB



Длина стороны BA :

$$BA = \left|\vec{a} - \vec{b}\right| = \sqrt{(\vec{a} - \vec{b})^2} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b}}$$

Длина высоты h, опущенной на сторону OA

$$\vec{h} = \overrightarrow{\Pi p}_a \vec{b} - \vec{b}$$

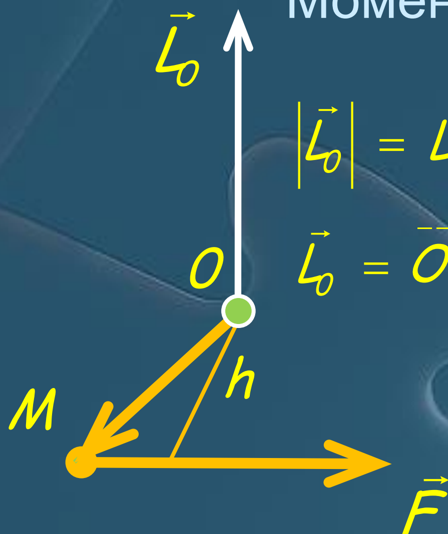
$$\vec{h} = \vec{a}^0(\vec{b}\cdot\vec{a}^0) - \vec{b} = \frac{\vec{a}(\vec{a}\cdot\vec{b})}{a^2} - \vec{b}$$

$$h = \sqrt{\left(\frac{\vec{a}(\vec{a}\cdot\vec{b})}{a^2} - \vec{b}\right)^2}$$

Векторное произведение двух векторов

- *Векторное произведение двух векторов* возникло из понятия момента силы

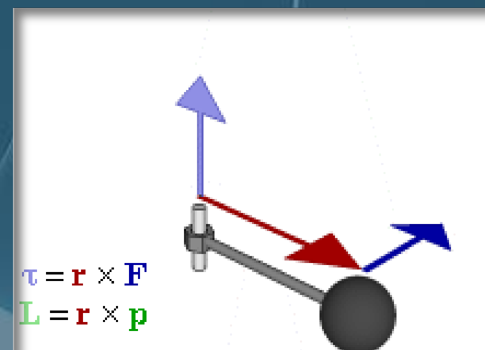
Момент силы

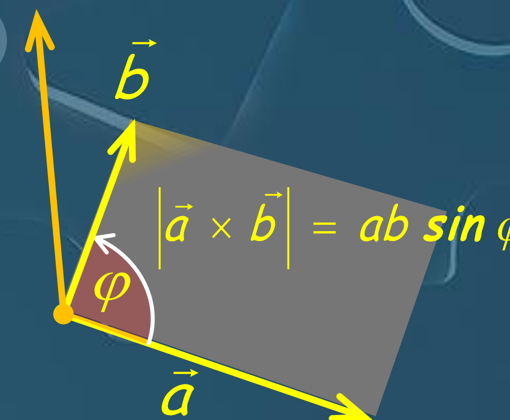


$$\left|\vec{L}_O\right| = L_O = Fh$$

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \times \vec{F}$$

$$\vec{N} = \vec{a} \times \vec{b}$$





$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = ab \sin\varphi$$

$[\vec{a}\vec{b}]$ $\vec{a} \times \vec{b}$ $[\vec{a}, \vec{b}]$

Векторным произведением двух векторов a и b называется третий вектор N, который

1) имеет модуль, равный пощади параллелограмма, построенного на перемножаемых векторах;

2) направлен перпендикулярно к перемножаемым векторам так, что, если смотреть с его конца, поворот от первого перемножаемого вектора ко второму будет происходить против часовой стрелки.

Законы векторного умножения

- Равенство векторного произведения нулю равносильно равенству нулю его модуля, т. е. :

$$\vec{a} = 0 \quad \vee \quad \vec{b} = 0 \quad \vee \quad \vec{a} \parallel \vec{b}$$

Условие коллинеарности двух векторов : $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = 0$

1) антикоммутативный закон $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

2) дистрибутивный закон $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$

3) ассоциативный закон (относительно скалярных множителей)

$$(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda (\vec{a} \times \vec{b})$$

Векторное произведение координатных ортов

- Для векторного квадрата нет обозначения, так как $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

поэтому $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{0}, \quad \vec{j} \times \vec{j} = \vec{0}, \quad \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$

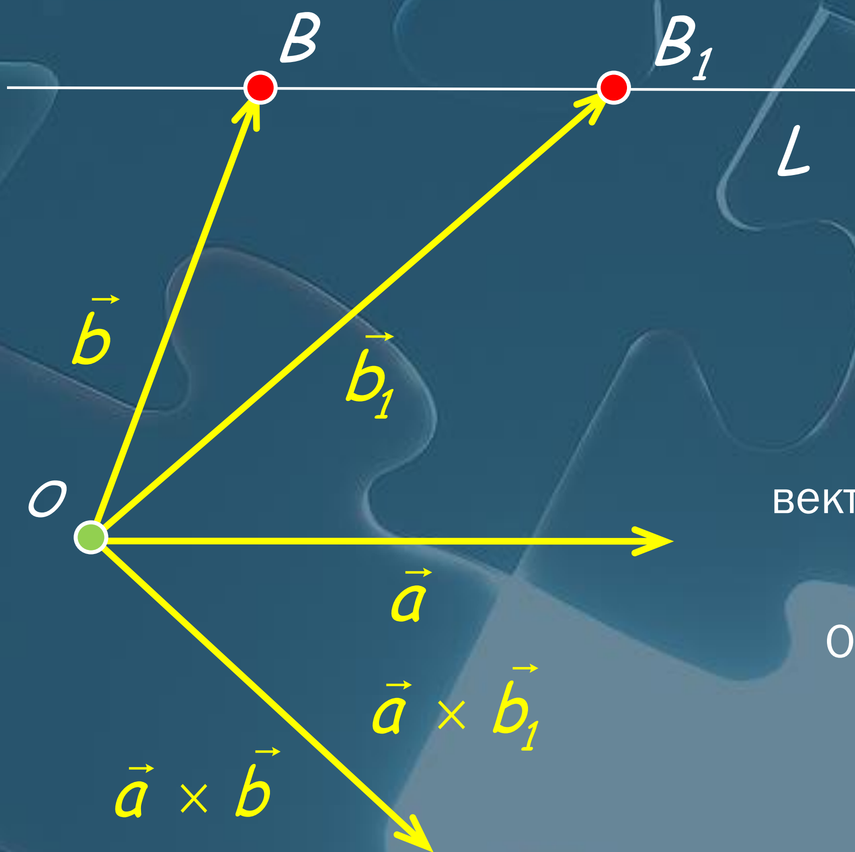
$$\left\langle \begin{matrix} \vec{i} \times \vec{i} & \vec{i} \times \vec{j} & \vec{i} \times \vec{k} \\ \vec{j} \times \vec{i} & \vec{j} \times \vec{j} & \vec{j} \times \vec{k} \\ \vec{k} \times \vec{i} & \vec{k} \times \vec{j} & \vec{k} \times \vec{k} \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} \vec{0} & \vec{k} & -\vec{j} \\ -\vec{k} & \vec{0} & \vec{i} \\ \vec{j} & -\vec{i} & \vec{0} \end{matrix} \right\rangle$$

Векторное произведение в координатной форме

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \times (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Векторное произведение двух векторов – разложение определителя

Неопределенность действия, обратного векторному умножению



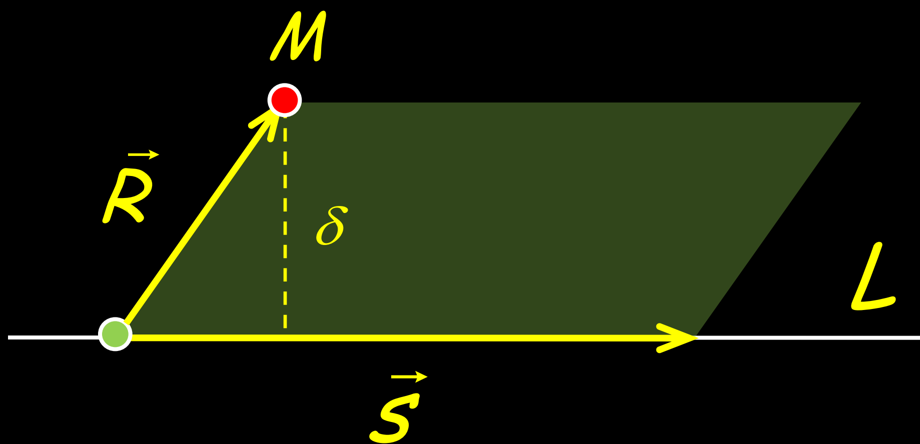
$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{b}_1$$

Существует бесчисленное множество векторов, которые при векторном умножении будут давать один и тот-же вектор.

Однозначно определить операцию деления вектора на вектор нельзя.

@ *Определить расстояние от точки M до прямой L*

Решение



$$\delta = \frac{\left|\vec{s} \times \vec{R}\right|}{s}$$

$$\sigma_п = s\delta \qquad \sigma_п = \left|\vec{s} \times \vec{R}\right|$$

- *Типы произведений*

1) Простейшее произведение трех векторов

– в результате получаем вектор, коллинеарный с третьим вектором $\vec{c}$

$$(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$$

2) Векторно–векторное произведение

– в результате получаем вектор, компланарный векторам $\vec{a}$ $\vec{b}$

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$$

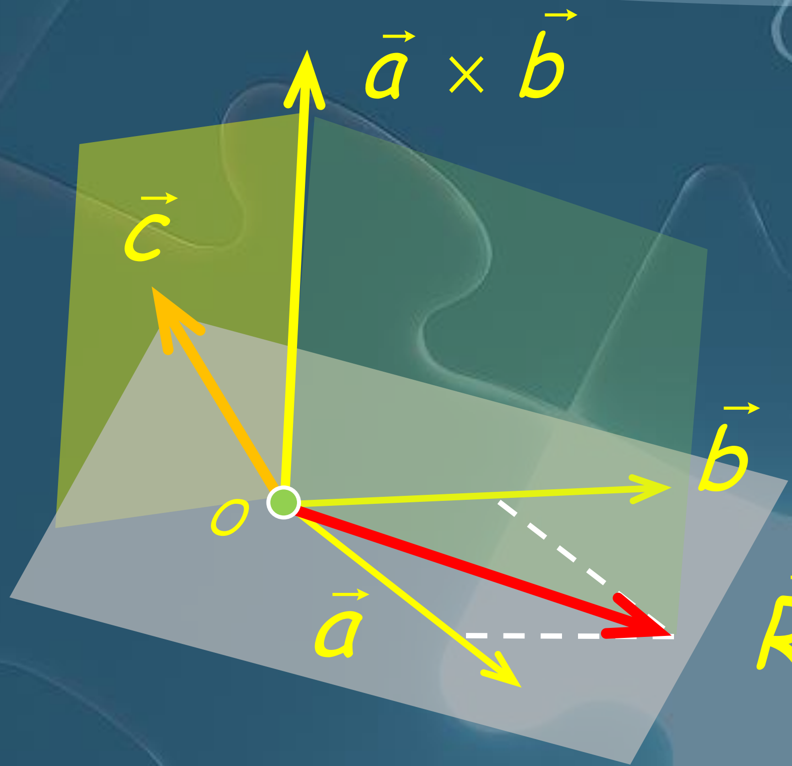
3) Векторно–скалярное (смешанное) произведение

– в результате получаем скаляр

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$$

Векторно-векторное произведение трех векторов

- $$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c})$$



$$\vec{R}=(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$$

$$\vec{R}\perp(\vec{a}\times\vec{b})\quad \vec{R}\perp\vec{c}$$

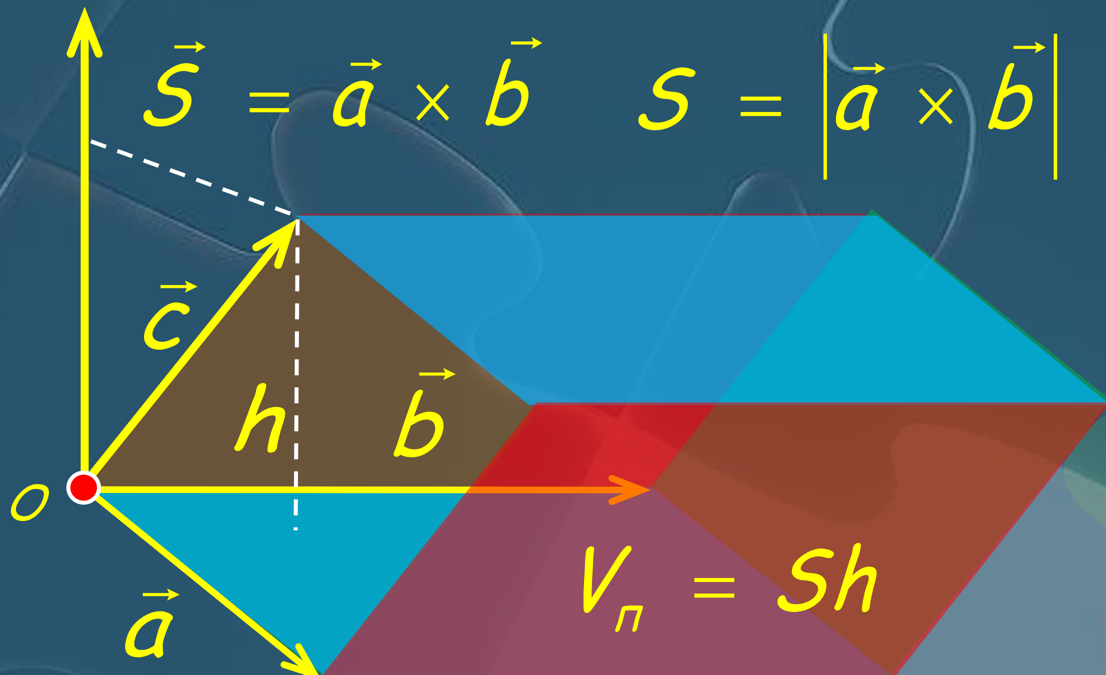
$$\vec{R}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$$

Векторно-скалярное (смешанное) произведение

- $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

$$\vec{S} = \vec{a} \times \vec{b} \qquad S = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| \qquad h = \left|\Pi p_{S}\vec{c}\right| = \vec{S} \cdot \vec{c}$$

$$V_{п} = \left|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}\right|$$



$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \pm V_{п}$$

"+" – правая тройка векторов

"–" – левая тройка векторов

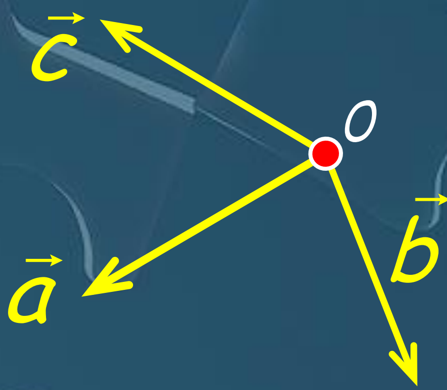
Законы векторно-скалярного произведения

Равенство смешанного произведения векторов нулю – условие компланарности трех векторов $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=0$

1) закон сочетательности

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$$

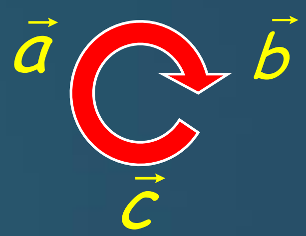
$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$$



2) закон круговой переместительности

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=-(\vec{b},\vec{a},\vec{c})=(\vec{b},\vec{c},\vec{a})=$$

$$=-(\vec{c},\vec{b},\vec{a})=(\vec{c},\vec{a},\vec{b})=-(\vec{a},\vec{c},\vec{b})$$



3) закон распределительности

$$(\vec{a}+\vec{a}_1,\vec{b},\vec{c})=(\vec{a},\vec{b},\vec{c})+(\vec{a}_1,\vec{b},\vec{c})$$

Смешанное произведение в координатной форме

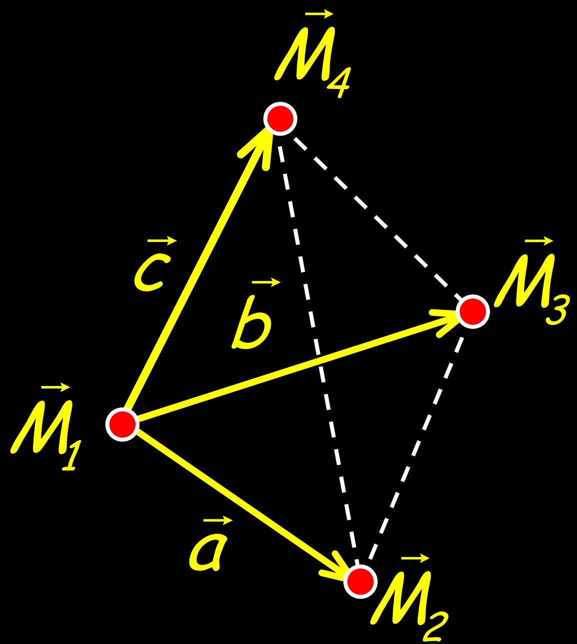
$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = (a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\cdot\left(\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}\right)$$

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}$$

@ *Определение объема тетраэдра*

Решение



$$V = \frac{1}{6}\left|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})\right|$$

$$V = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{M_1M_4})\right|$$

$$V = \frac{1}{6} mod \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}$$

Выражение векторно-скалярного произведения через скалярные произведения

$\vec{p} \cdot \vec{q} = pq\,\cos\varphi$ $\qquad$ $|\vec{p} \times \vec{q}| = pq\,\sin\varphi$

$$(\vec{p} \cdot \vec{q})^2 + (\vec{p} \times \vec{q})^2 = \vec{p}^{\,2}\vec{q}^{\,2}$$

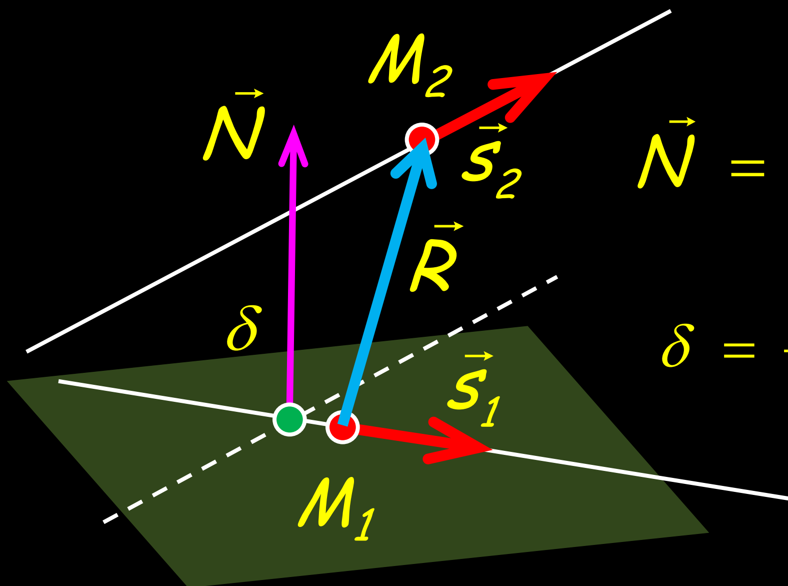
Основное тождество: Сумма квадратов скалярного и векторного произведений двух векторов равно произведению квадратов этих векторов.

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})^2 = \{(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}\}^2 = (\vec{a} \times \vec{b})^2 \vec{c}^{\,2} - \{(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}\}^2$$

Все вычисления в векторной алгебре сводятся к вычислению скалярных произведений

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})^2 = \begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{a} & \vec{a} \cdot \vec{b} & \vec{a} \cdot \vec{c} \\ \vec{b} \cdot \vec{a} & \vec{b} \cdot \vec{b} & \vec{b} \cdot \vec{c} \\ \vec{c} \cdot \vec{a} & \vec{c} \cdot \vec{b} & \vec{c} \cdot \vec{c} \end{vmatrix}$$

@ *Определить кратчайшее расстояние между двумя прямыми*



Решение

$$\vec{N} = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2 \qquad \delta = \left| \text{Пр}_N \vec{R} \right| = \left| \vec{R} \cdot \vec{N}^0 \right|$$

$$\delta = \frac{\left| (\vec{R}, \vec{s}_1, \vec{s}_2) \right|}{\left| \vec{s}_1 \times \vec{s}_2 \right|}$$

$$\delta = \sqrt{\frac{\begin{vmatrix} \vec{R}\cdot\vec{R} & \vec{R}\cdot\vec{s}_1 & \vec{R}\cdot\vec{s}_2 \\ \vec{s}_1\cdot\vec{R} & \vec{s}_1\cdot\vec{s}_1 & \vec{s}_1\cdot\vec{s}_2 \\ \vec{s}_2\cdot\vec{R} & \vec{s}_2\cdot\vec{s}_1 & \vec{s}_2\cdot\vec{s}_2 \end{vmatrix}}{\vec{s}_1^{\,2}\vec{s}_2^{\,2} - (\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2)^2}}$$