ЛОГИКА ВЫСКАЗЫВАНИЙ

{ высказывания - истинностные значения - сложные высказывания - пропозициональные связки - таблицы истинности - пример сложного высказывания - пропозициональные формулы – пропозициональные переменные и оценки - вычисление истинностных значений - символы мета-языка - тавтологии и противоречия - семантическое следование - пример рассуждения на русском языке -формальный анализ рассуждения - эквивалентные формулы - тавтологии как логические законы }

Высказывания

- **Высказывание** – это такое предложение языка, которое что-то утверждает.

	Является ли предложение высказыванием ?	Истинно ли оно ?
Река Волга впадает в Каспийское море	Да	Да
Куда впадает река Волга?	Нет	
Число 2 больше, чем число 3	Да	Нет
Сравните числа 2 и 3	Нет	
Луна – это спутник Земли	Да	Да
Марс – это спутник Земли	Да	Нет
Число 3 больше, чем число 2	Да	Да
Мальчик Женя любит манную кашу	Да	?
Высказывание, записанное в этой строке, ложно	?	?

Истинностные значения

- Высказывание – это такое предложение русского языка, которое что-то утверждает и в соответствии с этим может быть признано истинным или ложным.

	Истинностное значение
Река Волга впадает в Каспийское море	истина
Куда впадает река Волга?.	Не является высказыванием
Число 2 больше, чем число 3	ложь
Сравните числа 2 и 3	Не является высказыванием
Луна – это спутник Земли	истина
Марс – это спутник Земли	ложь
Число 3 больше, чем число 2	истина
Мальчик Женя любит манную кашу	Может быть истина или ложь
Высказывание, записанное в этой строке, ложно . . .	Не является высказыванием

Сложные высказывания

- Простые высказывания:

φ_1 = «*Река Волга впадает в Каспийское море*» (истина)
φ_2 = «*Число 2 больше, чем число 3*» (ложь)
φ_3 = «*Луна – это спутник Земли*» (истина)
φ_4 = «*Марс – это спутник Земли*» (ложь)

- Сложные высказывания:

ψ_1 = «*Не верно, что река Волга впадает в Каспийское море*» (ложь)
ψ_2 = «*Число 2 больше, чем число 3, и Луна – это спутник Земли*» (ложь)
ψ_3 = «*Луна – это спутник Земли или Марс – это спутник Земли*» (истина)
ψ_4 = «*Если Луна – это спутник Земли, то и Марс – это спутник Земли*» (ложь)

- Сложные высказывания образуются из простых высказываний при помощи стандартных оборотов естественного языка:

ψ_1 = «*не верно, что* φ_1», ψ_2 = «φ_2 *и* φ_3», ψ_3 = «φ_3 *или* φ_4», ψ_4 = «*если* φ_3, *то* φ_4»

Пропозициональные связки

- Для сокращённой записи сложных высказываний используют пропозициональные связки, которые вводятся следующим образом :

отрицание $\neg$: $\neg\varphi$ означает « *не верно, что* φ »,

конъюнкция $\wedge$: $\varphi \wedge \psi$ означает « φ *и* ψ »,

дизъюнкция $\vee$: $\varphi \vee \psi$ означает « φ *или* ψ »,

импликация $\rightarrow$: $\varphi \rightarrow \psi$ означает « *если* φ, *то* ψ », « φ *влечёт* ψ ».

Например, следующие соотношения

ψ_1 = «не верно, что φ_1», ψ_2 = «φ_2 и φ_3»,
ψ_3 = «φ_3 или φ_4», ψ_4 = «если φ_3 , то φ_4»

при помощи пропозициональных связок можно записать короче:

$\psi_1 = \neg\varphi_1$, $\psi_2 = \varphi_2 \wedge \varphi_3$, $\psi_3 = \varphi_3 \vee \varphi_4$, $\psi_4 = \varphi_3 \rightarrow \varphi_4$.

Таблицы истинности

- Если истинностные значения простых высказываний известны, то истинностные значения сложных высказываний можно определить при помощи таблиц истинности: таблицы истинности для каждой из пропозициональных связок могут быть сведены в единую таблицу, в которой значению истина соответствует 1, а значению ложь – 0.

φ	ψ	$\neg\varphi$	$\varphi\wedge\psi$	$\varphi\vee\psi$	$\varphi\rightarrow\psi$
0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0
1	1	0	1	1	1

Замечания:

- *дизъюнкция отвечает не разделительному, но объединительному союзу или*
- *импликация отвечает правилу «из лжи следует всё, что угодно»*

Пример сложного высказывания

@ ξ = *«Когда идёт дождь, отменяются работы в поле, а когда нет работ в поле, тогда в клубе бывают танцы – но ведь идёт дождь, а потому в клубе будут танцы!»*

Логическая структура этого сложного высказывания ξ может быть выявлена, если ввести такие простые высказывания:

A = «Идёт дождь»,
B = «Есть работы в поле»,
C = «В клубе танцы».

Тогда исходное высказывание ξ может быть представлено так :

$$\xi = (A \to \neg B) \wedge (\neg B \to C) \to (A \to C)$$

Пропозициональные формулы

Символически записанное сложное высказывание

$$(A \to \neg B) \wedge (\neg B \to C) \to (A \to C)$$

представляет собой пример пропозициональной формулы.

Вообще, пропозициональные формулы (а короче: формулы) строятся из пропозициональных букв (которые представляют собой заглавные буквы латинского алфавита, быть может с индексами), пропозициональных связок и скобок в соответствии с таким формальным определением:

- Пропозициональная буква есть формула.
- Если φ и ψ формулы, то $(\neg\varphi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \to \psi)$ – тоже формулы.

Внешние скобки в записи формул принято опускать, а кроме того часто опускают и те скобки, которые легко восстановить, учитывая приоритеты пропозициональных связок: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$ (сильнее всех связывает отрицание и слабее всех – импликация).

Подформулы

Те формулы, которые последовательно возникают при построении данной формулы (начиная с пропозициональных букв) в соответствии с двумя пунктами формального определения, являются её *подформулами*. Так, для формулы

$$\xi = (A \to \neg B) \wedge (\neg B \to C) \to (A \to C)$$

подформулами будут, например, следующие формулы:

$$\xi_1 = A$$

$$\xi_2 = \neg B$$

$$\xi_3 = (A \to \neg B)$$

$$\xi_4 = (A \to \neg B) \wedge (\neg B \to C)$$

Главной связкой формулы называется та, которая в процессе построения этой формулы появляется последней. Так, для формулы ξ_2 главной связкой является отрицание, для ξ_4 – конъюнкция, для ξ и ξ_3 – импликация, а формула ξ_1 главной связки не имеет, так как она является *атомарной.*

Пропозициональные переменные и оценки

Пропозициональные буквы A, B, C… могут быть (как это и было в примере) обозначениями высказываний, а высказывания могут быть истинными или ложными. Поэтому пропозициональные буквы можно рассматривать как пропозициональные переменные, принимающие значения из множества {0,1}. Всякое распределение этих двух истинностных значений между всеми пропозициональными переменными называется оценкой (или означиванием). Таким образом, оценка v есть функция, которая сопоставляет каждой пропозициональной переменной определённое истинностное значение (истина 1 или ложь 0).

Через V обозначается множество всех оценок. Если φ – пропозициональная формула и v – некоторая оценка, то при помощи таблиц истинности может быть вычислено истинностное значение формулы φ при оценке v. Это значение (истина 1 или ложь 0) обозначается через $\varphi(v)$.

Множество оценок V для трёх пропозициональных переменных :

V		A	B	C
	v_1	0	0	0
	v_2	0	0	1
	v_3	0	1	0
	v_4	0	1	1
	v_5	1	0	0
	v_6	1	0	1
	v_7	1	1	0
	v_8	1	1	1

Вычисление истинностных значений

	A	B	C	$(A \to \neg B) \land (\neg B \to C) \to (A \to C)$
v_1	0	0	0	0 1 10 0 10 0 0 1 0 1 0
v_2	0	0	1	0 1 10 1 10 1 1 1 0 1 1
v_3	0	1	0	0 1 01 1 01 1 0 1 0 1 0
v_4	0	1	1	0 1 01 0 01 1 1 1 0 1 1
v_5	1	0	0	1 1 10 0 10 0 0 1 1 0 0
v_6	1	0	1	1 1 10 1 10 1 1 1 1 1 1
v_7	1	1	0	1 0 01 0 01 1 0 1 1 0 0
v_8	1	1	1	1 0 01 0 01 0 1 1 1 1 1

Значения подформул подписываются под их главными связками

Порядок вычислений:

жёлтые значения (подписываются)
зелёные значения (вычисляются по жёлтым)
белые значения (вычисляются по жёлтым и зелёным)
розовые значения (вычисляются по белым и жёлтым)
красные значения (вычисляются по розовым и являются итоговыми)

Символы метаязыка

Формальный язык – это язык, предназначенный для записи формальных предложений (в нашем случае – пропозициональных формул)

- Метаязык – это язык, на котором можно говорить о формальном языке.

В метаязыке используются следующие символы (для сокращения стандартных оборотов естественного языка):

мета-импликация $\Rightarrow$ – читается: «если … , то …», «следует»;

мета-эквивалентность $\Leftrightarrow$ – читается: «тогда и только тогда», «равносильно»;

квантор общности $\forall$ – читается: «для любого», «для всех»;

квантор существования $\exists$ – читается: «существует», «найдется хотя бы один».

Эти символы иногда включают в алфавиты формальных языков, однако здесь все они представляют собой элементы не формального языка, но того метаязыка, на котором можно рассуждать о формальном языке логики высказываний (пропозициональном языке).

К средствам метаязыка можно отнести и *символ принадлежности* $\in$: запись $x \in X$ означает, что *элемент* x *принадлежит множеству* X .

Тавтологии и противоречия

Из таблицы, рассмотренной ранее, видно, что формула $\xi = (A \to \neg B) \wedge (\neg B \to C) \to (A \to C)$ истинна при любой оценке: $\forall v \in V\ (\xi(v)=1)$.
Это значит, что она является *тавтологией* .

- По определению:

формула φ является *тавтологией* $\Leftrightarrow \forall v \in V\ (\varphi(v)=1)$,
формула φ является *противоречием* $\Leftrightarrow \forall v \in V\ (\varphi(v)=0)$,
формула φ является *выполнимой* $\Leftrightarrow \exists v \in V\ (\varphi(v)=1)$,
формула φ является *опровержимой* $\Leftrightarrow \exists v \in V\ (\varphi(v)=0)$.

- Легко проверить, что

формула φ является *тавтологией* $\Leftrightarrow$ формула $\neg\varphi$ является *противоречием,*
формула φ является *противоречием* $\Leftrightarrow$ формула $\neg\varphi$ является *тавтологией,*
формула φ является *выполнимой* $\Leftrightarrow$ формула $\neg\varphi$ является *опровержимой,*
формула φ является *опровержимой* $\Leftrightarrow$ формула $\neg\varphi$ является *выполнимой.*

Семантическое следование

Пусть Γ – это некоторое множество формул, ψ – формула и v – оценка, тогда

- запись $\Gamma(v) = 1$ означает, что $\forall\varphi\in\Gamma\ (\varphi(v) = 1)$,
- запись $\Gamma \vDash \psi$ означает, что $\forall v\in V\ (\Gamma(v)=1 \Rightarrow \psi(v)=1)$, и читается: «из множества формул Γ семантически следует формула ψ»,
- запись $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n \vDash \psi$ означает, что $\{\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n\} \vDash \psi$, то есть $\forall v\in V\ (\varphi_1(v)=\varphi_2(v)=\ldots=\varphi_n(v)= 1 \Rightarrow \psi(v)=1)$,
- запись $\vDash \psi$ означает, что формула ψ семантически следует из пустого множества формул, то есть является тавтологией.

Лемма: $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n \vDash \psi \iff \vDash \varphi_1\wedge\varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \to \psi$

Пример рассуждения на русском языке

@ «Если бы он ей не сказал, она ни за что не узнала бы.
А не спроси она его, он бы и не сказал ей.
Но она узнала.
Значит, она его спросила.»

Логическая структура этого рассуждения может быть выявлена, если ввести высказывания:

A = «Он ей сказал»,
B = «Она узнала»,
C = «Она его спросила».

Тогда исходное рассуждение может быть представлено так:

Из высказываний $(\neg A \rightarrow \neg B)$, $(\neg C \rightarrow \neg A)$, B следует высказывание C

Формальный анализ рассуждения

	A	B	C		$\neg A \to \neg B$	$\neg C \to \neg A$	B		C
v_1	0	0	0		10 1 10	10 1 10	0		0
v_2	0	0	1		10 1 10	01 1 10	0		1
v_3	0	1	0		10 0 01	10 1 10	1		0
v_4	0	1	1		10 0 01	01 1 10	1		1
v_5	1	0	0		01 1 10	10 0 01	0		0
v_6	1	0	1		01 1 10	01 1 01	0		1
v_7	1	1	0		01 1 01	10 0 01	1		0
v_8	1	1	1		01 1 01	01 1 01	1		1

Рассматриваемое рассуждение должно быть признано верным:

все три формулы $\neg A \to \neg B$, $\neg C \to \neg A$ и B одновременно истинны только при оценке v_8, но при этой оценке истинна также и формула C, поэтому имеет место семантическое следование

$$(\neg A \to \neg B),\ (\neg C \to \neg A),\ B \vDash C$$

Эквивалентные формулы

- Две пропозициональные формулы φ и ψ эквивалентны ($\varphi \sim \psi$), если их истинностные значения при любой оценке одинаковы:

$$\varphi \equiv \psi \quad \Leftrightarrow \quad \forall v \in V\ (\ \varphi(v) = \psi(v)\ )\ .$$

Запись $\varphi \equiv \psi$ служит сокращением для записи формулы $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$. Таким образом вводится ещё одна (производная) пропозициональная связка эквивалентность $\equiv$ (здесь символ $\equiv$ есть символ формального языка, в то время как символ $\sim$ является символом метаязыка).

Лемма: $\varphi \sim \psi \quad \Leftrightarrow \ \vDash\ \varphi \equiv \psi$.

φ	ψ	$\varphi \equiv \psi$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Все тавтологии эквивалентны друг другу и эквивалентны формуле $\top = A \vee \neg A$; все противоречия эквивалентны друг другу и эквивалентны формуле $\bot = A \wedge \neg A$. Символы $\top$ и $\bot$ рассматриваются как символы формального языка, обозначающие производные ноль-местные связки.

Тавтологии как логические законы

Тавтология – это формула, которая всегда истинна. Название «тавтология» объясняется тем, что такая формула не сообщает никакой информации об истинности её переменных (тех элементарных высказываний, из которых она построена). С другой стороны, тавтология описывает схему, которой может следовать верное (с логической точки зрения) рассуждение. В этой связи о некоторых тавтологиях говорят как о логических законах :

- $A \vee \neg A$ – закон исключённого третьего,
- $\neg\neg A \to A$ – закон снятия двойного отрицания,
- $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$, $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$ – законы де Моргана,
- $(\neg A \to \neg B) \equiv (B \to A)$ – закон ложного положения,
- $\perp \to A$ – закон, соответствующий правилу: «из лжи следует всё, что угодно» .